

MODELOS MATEMÁTICOS GENERALES PARA LA PREDICCIÓN DEL CBR (CALIFORNIA BEARING RATIO) EN LOS SUELOS BOLIVIANOS

Benítez Reynoso Alberto

Ingeniero Civil, M.Sc., Ph.D., Dr. Sc.

Dirección para la correspondencia:

Correo Electrónico: albere3716@gmail.com

RESUMEN

Los ingenieros, a menudo, debemos predecir o estimar algunas propiedades de los suelos cuando hay poca o ninguna información proveniente de ensayos de laboratorio. Entonces, se plantean las siguientes preguntas: ¿Cuáles son las leyes de variación de la capacidad portante de los suelos bolivianos, expresadas en términos del CBR, en función de otra u otras variables, cuya determinación es más simple?; ¿Cómo se expresan esas leyes en términos de modelos matemáticos y cuál es el grado de correlación entre las diferentes variables?; ¿Cómo estimar la capacidad portante de los suelos bolivianos (expresada en términos del CBR) sin recurrir a ensayos de laboratorio, conociendo otra u otras propiedades, cuya determinación es más simple y toma mucho menos tiempo?; ¿Qué implicaciones tienen los modelos citados en los proyectos y obras pertenecientes al campo de la ingeniería de vial?

En consecuencia, en este trabajo de investigación, se determinan las leyes de variación de la capacidad portante de los suelos, expresada en términos del CBR y representadas por relaciones matemáticas con otras variables geotécnicas, con referencia particular a los suelos de las diferentes “provincias fisiográficas” de Bolivia, se formulan modelos matemáticos, en términos de ecuaciones, que permitan estimar el CBR sin recurrir a ensayos de laboratorio, conociendo otra u otras variables, cuya determinación es más simple y/o más rápida y se establecen las implicaciones y/o utilidad que tienen los modelos citados en el contexto de la práctica, cuando se diseña estructuras de pavimentos con valores del CBR predichos con los modelos, en comparación con los diseños usando

valores del CBR de laboratorio.

Como metodologías científicas generales, se usan los métodos inductivo y deductivo y, como métodos específicos, el análisis multivariado, expresado como regresión múltiple. Al final, se formulan las conclusiones y recomendaciones respectivas.

PALABRAS CLAVE:

Modelos matemáticos, CBR (California Bearing Ratio), cuadrados mínimos, fenómenos geotécnicos, variables geotécnicas e idoneidad de modelos.

ABSTRACT

Engineers often have to predict or estimate some properties of soils when there is little or no information from laboratory tests. Then, the following questions are formulated: What are the laws of variation of the carrying capacity of Bolivian soils, expressed in terms of the CBR, based on another or other variables, whose determination is simpler?; How are these laws expressed in terms of mathematical models and what is the degree of correlation between the different variables? How to estimate the carrying capacity of Bolivian soils (expressed in terms of the CBR) without resorting to laboratory tests, knowing another or other properties, whose determination is simpler and takes much less time?; What are the implications of the models cited in the projects and works belonging to the field of road engineering?

Consequently, in this research work, the laws of variation of the bearing capacity of soils, expressed in terms of the CBR and represented by mathematical relationships with other geotechnical

variables, with particular reference to the soils of the different physiographic provinces, are determined. Mathematical models are formulated, in terms of equations that allow estimating the CBR without resorting to laboratory tests, knowing other variables whose determination is simpler and/or faster and the implications are established and/or the utility of the aforementioned models in the context of practice.

As general scientific methodologies, inductive and deductive methods are used and, as specific methods, multivariate analysis, expressed as multiple regression. At the end, the conclusions and recommendations are stated.

KEYWORDS:

Mathematical models, CBR (California Bearing Ratio), minimum squares, geotechnical phenomena, geotechnical variables and suitability of models.

1. INTRODUCCIÓN Y OBJETIVOS:

En el afán de comprender y explicar la naturaleza y sus fenómenos, la humanidad ha creado un cuerpo de ideas llamado ciencia. La primera (naturaleza) existe independientemente de la humanidad, en tanto que la ciencia es una creación del hombre, de la humanidad.

Una pequeña parte de esa naturaleza, la constituye el suelo, que es objeto de estudio de la ciencia denominada Mecánica de Suelos y cuyas aplicaciones a la Ingeniería son objeto de la denominada Ingeniería Geotécnica.

En ese contexto, los ingenieros geotécnicos y los científicos del suelo, han desarrollado una variedad de métodos, procedimientos, equipos (de laboratorio y campo) y modelos (conceptuales, físicos, matemáticos, etc.), que permiten el estudio de los diferentes fenómenos que ocurren en el suelo y sus variables inherentes.

Un fenómeno geotécnico, suele expresarse mediante variables que lo representan. Así, una de las formas de expresar la resistencia de un suelo (fenómeno mecánico), es mediante el esfuerzo de compresión no confinada (variable). Análogamente, la capacidad portante de un suelo (fenómeno mecánico), se expresa en términos de una variable

denominada CBR (California Bearing Ratio o Valor Soporte California), de mucha utilidad en el cálculo de la estructura de los pavimentos. En síntesis, los fenómenos geotécnicos quedan representados por sus variables inherentes que los caracterizan.

La mecánica de suelos es una ciencia sustentada en la experimentación y muchas de sus variables se determinan mediante ensayos de laboratorio, desde los más simples y económicos, hasta los más complejos y costosos, algunos de los cuales pueden durar bastante tiempo. Solo la determinación del CBR, en laboratorio, toma, como mínimo 4 días, otros ensayos pueden durar más tiempo.

En ingeniería geotécnica es frecuente la necesidad de predecir variables de ciertos fenómenos, cuando hay poca o ninguna información proveniente de ensayos de laboratorio o de campo. En muchas ocasiones, no es posible realizar tales ensayos para un determinado proyecto o cálculo, porque no se tiene el equipo apropiado, porque toma mucho tiempo (considerando la urgencia del proyecto), en fin, porque es muy costoso. Estas razones, entre otras, conducen a formular el PROBLEMA a través de las siguientes preguntas, en relación a la predicción o estimación del CBR, a saber:

¿Cuáles son las leyes de variación de la capacidad portante de los suelos bolivianos, expresadas en términos del CBR, en función de otra u otras variables, cuya determinación es más simple?

¿Cómo se expresan esas leyes en términos de modelos matemáticos y cuál es el grado de correlación entre las diferentes variables?

¿Cómo estimar la capacidad portante de los suelos bolivianos (expresada en términos del CBR) sin recurrir a ensayos de laboratorio, conociendo otra u otras propiedades, cuya determinación es más simple y toma mucho menos tiempo?

¿Qué implicaciones tienen los modelos citados en los proyectos y obras pertenecientes al campo de la ingeniería de pavimentos?

Consecuentemente, los OBJETIVOS del trabajo de investigación se pueden precisar en los siguientes términos:

(1) Determinar las leyes de variación de la capacidad portante de los suelos, expresada en términos del CBR y representadas por relaciones matemáticas con otras variables geotécnicas, con referencia particular a los suelos de las diferentes “provincias fisiográficas” de Bolivia.

(2) Formular modelos matemáticos, en términos de ecuaciones, que permitan estimar el CBR sin recurrir a ensayos de laboratorio, conociendo otra u otras variables, cuya determinación es más simple y más rápida.

(3) Determinar las implicaciones y utilidad que tienen los modelos citados en el contexto de los diseños de estructurales de pavimentos, cuando se los diseña con valores del CBR predichos con los modelos, en comparación con los diseños usando valores del CBR de laboratorio.

2. NOVEDAD CIENTÍFICA:

Bolivia es un país diverso en varios aspectos, pero, particularmente lo es en relación a su geografía, en especial con relación al origen y composición de sus suelos, mismos que presentan propiedades geotécnicas distintas, según la zona geográfica o “provincia fisiográfica o geológica” a la que pertenecen.

En general, en Bolivia no existen antecedentes teóricos y prácticos con relación a la formulación de modelos teórico-matemáticos, expresados en términos de ecuaciones, que permitan la predicción de variables pertenecientes a diferentes fenómenos geotécnicos. Específicamente, no se han registrado, publicado, ni patentado modelos matemáticos que permitan predecir el Valor Soporte California, conocido como CBR, en función de otras variables geotécnicas, cuya determinación es más simple y/o más rápida, por ejemplo, los límites de consistencia, propiedades granulométricas y otras.

Consecuentemente, la novedad científica, de la investigación se resume en los siguientes elementos:

a) Desde el punto de vista teórico, se destaca el uso de la matemática avanzada (cálculo diferencial y análisis matricial), mediante la cual formulan los modelos, expresados en términos de ecuaciones,

que permiten expresar leyes de variación de un fenómeno geotécnico (capacidad portante, identificado por su variable CBR), en función de otros fenómenos, como la plasticidad, expresada en términos de los límites de consistencia (límite líquido, límite plástico e índice de plasticidad), el índice de grupo, etc., de más fácil y simple determinación experimental que el CBR. Los modelos se formulan para cada una de las seis provincias fisiográficas o geológicas de Bolivia, a saber: Cordillera Oriental, Altiplano, Cordillera Oriental, Sub Andino, Llanura Chaco-Beniana y Escudo Brasileño. Pero, el uso de la matemática no solo se limita a la formulación de los modelos, sino que, el cálculo diferencial se usa para interpretar esos modelos en términos de funciones y su comportamiento cuando las variables adoptan valores extremos (máximos y mínimos).

b) La utilidad o significación práctica radica en la solución de uno de los problemas planteados anteriormente, en términos de preguntas. Es decir, los modelos permiten predecir (calcular) el CBR para diferentes necesidades prácticas, sin la necesidad de realizar el ensayo de laboratorio, mismo que toma, al menos, cuatro días de tiempo. Asimismo, una vez calculado los valores del CBR, usando los modelos matemáticos que correspondan, según la provincia fisiográfica o geológica a la que pertenece el suelo, se pueden aplicar para diferentes fines, por ejemplo, para el dimensionado de estructuras de pavimentos, problema frecuente en los ingenieros de carreteras.

c) Además de los mencionados en a) y b), hay un otro elemento, que sustenta, aún más, la utilidad práctica de los modelos, que consiste en la calificación de la “idoneidad” de los mismos, en términos de predicción, la cual se determina al realizar la comparación de los valores del CBR observados (medidos experimentalmente) con los valores predichos (calculados con los modelos).

3. FUNDAMENTOS EMPÍRICOS Y TEÓRICOS; EL ENSAYO DEL CBR Y LA MODELACIÓN MATEMÁTICA:

Tal y como refiere el autor (Benítez, 2014), la Ingeniería Civil representa una síntesis entre lo empírico y racional o teórico, es decir, se nutre de ambas corrientes del pensamiento científico. Muchas teorías se han generado a partir de mediciones empíricas (experimentales) y muchas situaciones empíricas han sido consecuencia de teorías. En el caso de la Mecánica de Suelos e Ingeniería Geotécnica, la situación no es tan distinta. Por ejemplo, se tiene una teoría de la consolidación que se sustenta empíricamente, pero, a su vez, la teoría formulada genera consecuencias que pueden ser probadas empíricamente. Análogamente, se tiene lo que sucede en relación a los modelos matemáticos que expresan leyes de variación (teóricas) entre algún fenómeno (capacidad portante) y otros, por ejemplo, plasticidad de los suelos. Es decir, también, en el caso de la capacidad portante de un suelo, expresada en términos de la variable CBR, hay una combinación (síntesis) entre lo empírico (experimental) y lo teórico (racional).

Por esa razón, a continuación, se fundamenta el trabajo, primero desde el punto de vista experimental, en relación al ensayo del CBR y, en segundo término, se esboza la teoría (matemática).

Sobre el ensayo experimental del CBR, se ha escrito bastante, por lo que, simplemente se hace referencia a las ideas esenciales, a saber (Carter y Bentley, 1991):

- Fue originalmente desarrollado por la División de Carreteras de California en 1930 y años siguientes, como parte de un estudio de las fallas en los pavimentos. Posteriormente su uso fue extendido a las sub rasantes y, actualmente, es usado ampliamente en el diseño de pavimentos a lo largo de todo el mundo.
- Durante el ensayo experimental, se hace penetrar un pistón en el suelo, el cual es contenido en un molde estándar, a una tasa o velocidad especificada de penetración.

- El ensayo prosigue hasta una penetración de 5 mm y se traza la curva de esfuerzos (cargas) en función de las deformaciones (hundimientos).
- -La curva carga-deformación es comparada con la obtenida para un material estándar triturado.
- Se llama Valor Soporte California o CBR (por sus siglas en inglés), al tanto por ciento de presión (esfuerzo) ejercida por el pistón sobre el suelo, para una penetración determinada, en relación con la presión correspondiente a la misma penetración en una muestra patrón (el mencionado material triturado).
- Los detalles del ensayo han sido estandarizados y están dados en las especificaciones estándar ASTM D1883-07e2.

Con relación a la fundamentación teórica, científico-matemática, se puede comenzar haciendo alusión a que, en el ámbito de la ciencia, una hipótesis científica es una afirmación provisional que surge como una explicación o fundamentación explicativa del fenómeno observado y estudiado (Gutiérrez, 1996). Cuando la hipótesis logra ser confirmada, se convierte en una tesis o ley científica; esta confirmación puede llevarse a cabo mediante observaciones, mediciones experimentales (métodos empíricos), por métodos racionales (raciocinio) y/o por una combinación de más de uno de ellos. Es decir, una vez planteado el problema, como se lo ha hecho en la introducción, se busca una solución, a menos que se demuestre que se carece de tal. El camino para el hallazgo de la solución depende de la naturaleza del problema.

Al formular una hipótesis que, probablemente, se convierta en tesis o ley científica, se trata de relacionar dos o más fenómenos o variables involucradas en estos. Por eso es que, una ley científica puede definirse como una relación constante entre dos o más hechos, fenómenos o sus variables inherentes (Bunge, 2011 y Gutiérrez, 1996).

Hay varios fenómenos en la Mecánica de Suelos e Ingeniería Geotécnica, que pueden ser expresados mediante sus variables más importantes, consecuentemente, podemos relacionar, mediante

una hipótesis y/o ley, estos fenómenos o sus variables relevantes.

Las magnitudes se llaman también variables cuantitativas o numéricas, porque su campo de variabilidad es un conjunto de números. Este es el tipo de variables con las que trata habitualmente el ingeniero. Se necesita algunos conceptos más para caracterizar el de ley, a saber: variable independiente, variable dependiente y parámetros. Sea la expresión (modelo matemático) de la forma:

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X \quad (1)$$

X e Y suelen llamarse la variable independiente y la variable dependiente, respectivamente, mientras que β_0 y β_1 son parámetros del modelo. En la ciencia, la variable independiente es, a menudo, la variable de control, o sea, la variable a la cual pueden atribuirse valores o cambiarlos a voluntad dentro de ciertos límites. Esta distinción tiene una raíz filosófica, ya que, los cambios en los valores de la variable de control suelen llamarse causas, mientras que los cambios que se producen en la variable dependiente se llaman efectos. En fin, se da el nombre de parámetro a una variable cuyo valor no cambia por el cambio de los valores de las demás variables; en el ejemplo de la ecuación anterior, β_0 y β_1 son parámetros porque sus valores se mantienen constantes en un contexto dado, que se determinan con base en la información experimental.

Adicionalmente, para todo par de valores de β_0 y β_1 , la ecuación (1) puede considerarse como la representación analítica de una recta infinita en el plano (X,Y). Si β_0 y β_1 toman valores diferentes, se obtienen un número infinito de esas rectas. En consecuencia, cada miembro de este conjunto puede entenderse como una ley individual.

Hasta aquí, la (1) aún no es una ley científica porque sus variables tienen una interpretación solamente matemática. Únicamente si se interpretan al menos las variables X e Y , no solo como números cualesquiera, sino como variables numéricas de propiedades de algún sistema real, puede convertirse en una ley científica (Bunge, 2011). Esta es una cuestión clave en el planteamiento del problema y las respuestas a las preguntas científicas hechas

en la introducción, pues, un modelo matemático como (1) y otros más complejos, como varios de los obtenidos como resultados en esta investigación, reflejan relaciones entre variables que toman valores numéricos y representan propiedades de un sistema de la realidad, que son los fenómenos de la Mecánica de Suelos e Ingeniería Geotécnica, que se han mencionado en el planteamiento del problema. Entonces, se puede definir a una ley científica como una hipótesis científica confirmada, que establece una relación constante entre dos o más variables, cada una de las cuales representa una propiedad de sistemas reales concretos, al menos parcial e indirectamente; en este caso, el sistema real y concreto, además de natural, es el suelo.

No se puede terminar esta breve fundamentación teórica sin plantear dos cuestiones importantes, a saber:

- Si se plantea la hipótesis de que dos variables, que reflejan un fenómeno real de la Mecánica de Suelos, están relacionadas mediante la ley (1) u otra más compleja desde el punto de vista matemático, ¿cómo determinar los parámetros β_0 y β_1 considerando la información empírica (mediciones experimentales) existente?.
- ¿Hay experiencias teóricas y prácticas que permitan sustentar la posibilidad de dar las respuestas más apropiadas a nuestras preguntas científicas?

La primera de las preguntas tiene que ver con la teoría estadística, asociada con la metodología que se plantea en el próximo apartado, tanto para modelos unidimensionales o simples (una variable dependiente y una variable independiente), como para modelos múltiples (una variable dependiente y varias variables independientes).

Con relación a la segunda pregunta, se puede afirmar, categóricamente, que hay varias investigaciones teórico-prácticas que dieron resultados muy importantes sobre problemas análogos a esta investigación. Así:

- En Carter y Bentley (1991) y Magnan (1982), se mencionan una importante cantidad de

correlaciones y modelos teóricos de regresión entre diferentes propiedades geotécnicas de los suelos. También se hace énfasis en la aplicación e importancia de los métodos estadísticos y probabilistas en el campo de la ingeniería geotécnica.

- Son particularmente relevantes las conocidas ecuaciones que permiten estimar el coeficiente de consolidación en función del límite líquido (Terzaghi y Peck, 1967) y varias otras (mencionadas en Ameratunga y otros, 2016).
- No se puede dejar de mencionar las correlaciones y modelos de regresión propuestos por Casagrande, entre el índice de plasticidad y el límite líquido, que han sido usados en su carta de plasticidad, base del sistema unificado de clasificación de suelos (Carter y Bentley, 1981)
- Agarwal y Ghanekar (1970); Patel y Desai (2010); Vinod y Reena (2008), han propuesto modelos de regresión entre el CBR y otras propiedades para suelos de la India.
- En fin, el autor (Benítez, 2012) ha formulado varios modelos de regresión para algunos suelos bolivianos.

En suma, muchos problemas de la Mecánica de Suelos e Ingeniería Geotécnica se han resuelto, precisamente, formulando correlaciones y modelos de regresión entre las distintas variables que representan algunos fenómenos de esta rama de la Ingeniería, aunque, no se ha agotado el análisis y la discusión, pues, nunca se consideran todos los elementos, ni la totalidad de las variables que intervienen en un fenómeno dado, así como tampoco los suelos de todas las regiones del mundo. Consecuentemente, los aportes, como el presente, van a seguir enriqueciendo el acervo del conocimiento científico de la Mecánica de Suelos y sus implicaciones en la Ingeniería Geotécnica.

4. METODOLOGÍA

En el ámbito metodológico, es pertinente diferenciar entre metodologías científicas generales y métodos particulares que dependen de la naturaleza del problema. En este trabajo, se han usado ambos

tipos de metodologías, las cuales son descritas, sucintamente en los párrafos siguientes.

4.1 Metodologías científicas generales

La expresión “la ciencia se deriva de los hechos” puede ser interpretada en sentido de que el conocimiento científico se genera estableciendo primero los hechos y edificando luego una teoría, un modelo, etc., que se ajusta a ellos (Chalmers, 1999).

En el caso de la Mecánica de Suelos e Ingeniería Geotécnica, es posible partir de mediciones experimentales de variables inherentes a ciertos fenómenos. Estas mediciones son hechos singulares, que, se supone, darán lugar a la construcción de una teoría o modelo general (modelos matemáticos), lo que, sin duda alguna, constituye el llamado método inductivo; pero ¿Cómo se usa el método inductivo en esta investigación?; de la manera más sencilla, se siguen las siguientes etapas:

- Mediciones experimentales que expresen la variación de un fenómeno geotécnico (capacidad portante de los suelos en términos de la variable CBR), en función de otros fenómenos, tales como la plasticidad, expresada en términos de las variables conocidas como límites de consistencia y otras.
- Analizadas estas observaciones, se detecta una regularidad, por ejemplos, el CBR varía de manera inversa con el índice de grupo, o, de manera inversa con el índice de plasticidad.
- Si lo expresado en el párrafo precedente se repite para una gran cantidad de observaciones, en diferentes tipos de suelos y bajo una amplia variedad de condiciones, entonces, será posible construir uno o varios modelos teóricos (matemáticos) que expresen tales circunstancias.

Eso es precisamente lo que se hace en este trabajo, es decir, a partir de los hechos singulares (mediciones experimentales) se genera uno o más modelos teóricos, es decir, se usa el método inductivo.

Según el mismo autor (Chalmers, 1999), la exigencia para que esté justificada una inferencia inductiva como la señalada, desde los hechos

observables (mediciones experimentales en este caso), hasta las leyes (modelos matemáticos), debe satisfacer las siguientes condiciones:

- a) El número de observaciones, que constituyen la base de la generalización, debe ser grande.
- b) Las observaciones se deben repetir en una amplia variedad de condiciones.
- c) Ningún resultado observacional aceptado debe entrar en contradicción con la ley general (modelo) derivada.

En general, estas tres condiciones son cumplidas al formular los modelos teóricos (matemáticos).

Pero, también, en este trabajo, se usa el método deductivo (hipotético-deductivo), pues, se formula una hipótesis respecto de la forma matemática de los modelos y, una vez comprobada o contrastada la hipótesis, se acepta el modelo como válido. Pero, no solo eso, sino que, a partir de los modelos generales, se deducen consecuencias, se hacen predicciones, interpretaciones y se realizan explicaciones.

En suma, en este trabajo de investigación se usan, como metodologías científicas generales, el método inductivo y el método deductivo.

4.2 Métodos particulares

Así como hay metodologías científicas generales, que usan todas las ciencias, hay otros métodos específicos que conducen a la solución de problemas particulares. En este caso, vale la pena formular la siguiente pregunta: ¿Cómo construir los modelos teóricos (matemáticos) que expresen las leyes de variación del CBR como función de otras variables, a partir de las observaciones o mediciones experimentales?

Una respuesta a esta pregunta tiene su base en el uso de los métodos estadísticos, en particular el método de los cuadrados mínimos, que, por su importancia, se sintetiza a continuación.

Supóngase que, Y es una variable (dependiente) que corresponde a una propiedad mecánica de los suelos, por ejemplo, el CBR. Del mismo modo, sea X una variable (independiente) que corresponde a otra propiedad del suelo, por ejemplo, el índice de

plasticidad.

Si se utiliza el método de los cuadrados mínimos, el problema puede ser tratado mediante la siguiente estrategia (Mendenhall, W. y Sincich, T., 1997 y Benítez, 2004):

1. Proponer un modelo hipotético, por ejemplo, $Y = \beta_0 + \beta_1 X + \varepsilon$; siendo ε el componente aleatorio.
2. Encontrar los parámetros β_0 y β_1 . Se hace:

$$SSE = \sum_{i=1}^n (\hat{Y}_i - Y_i)^2 = \text{mínimo} \quad (2)$$

$$\frac{\partial SSE}{\partial \hat{\beta}_0} = 0; \quad \frac{\partial SSE}{\partial \hat{\beta}_1} = 0 \quad (3)$$

Donde $\hat{\beta}_0$ y $\hat{\beta}_1$ son los estimadores de los parámetros β_0 y β_1 ; Y_i son los valores medidos (experimentales); \hat{Y}_i son los valores estimados (con el modelo). Resolviendo las ecuaciones (3), se hallan los parámetros buscados.

3. Especificar la distribución de probabilidad del componente aleatorio ε .
4. Evaluar la “idoneidad” del modelo. Esto es calcular el coeficiente de correlación, R , y el coeficiente de determinación, R^2 .
5. Realizar un análisis de los residuales o errores $(\hat{Y}_i - Y_i)$.
6. Validar prácticamente el modelo, es decir, comparar los valores observados o medidos (Y), con los valores estimados con el modelo (\hat{Y}).
7. Usar el modelo para hacer predicciones de Y .

El método presentado se generaliza para modelos de regresión múltiple.

Sea Y una variable (dependiente) que corresponde a una propiedad mecánica del suelo. Sean X_1, X_2, \dots, X_p , las variables (independientes) correspondientes a otras propiedades mecánicas del suelo. Además, supóngase que se tienen n mediciones de cada una de las citadas variables. Se plantea un

3. Las hipótesis:

Una vez formulado el problema, se plantea la hipótesis, como una respuesta anticipada (modelo teórico) al problema formulado. Esto es precisamente lo que se hace a continuación, de manera muy puntual y específica para el caso investigado.

Sean:

- Capacidad portante del suelo (fenómeno geotécnico), expresada en términos de su variable (dependiente) $CBR = Y$, al 100% de la densidad seca máxima;
- $X =$ variable independiente general (que puede ser X_0, X_1, X_2 o X_3 , que se llamarán variables independientes específicas);
- Índice de grupo del suelo, representada por la variable (independiente) X_0 ;
- Plasticidad de un suelo (fenómeno geotécnico), representada por las variables independientes X_1 , (límite líquido) y X_2 (índice de plasticidad);
- Tamaño de los granos del suelo (propiedad física), expresado en términos de la variable independiente X_2 (porcentaje más fino que la abertura del tamiz N° 200, es decir, 0.075 mm).

4. **Formulación de las hipótesis o modelos teórico-matemáticos**, como una respuesta (solución) al problema formulado, en base a las premisas establecidas en los párrafos precedentes.

Primera hipótesis:

La ley de variación del $CBR = Y$, en función de la variable X (que puede ser X_0, X_1, X_2 o X_3), viene dada por el modelo matemático general:

$$Y = \frac{A}{(X + B)} \quad (10)$$

Donde A y B son parámetros del modelo, a ser determinados (en cada caso) en base a la información experimental, por el método de los cuadrados mínimos (análisis de regresión simple o unidimensional).

Segunda hipótesis:

La ley de variación del $CBR = Y$, en función de más de una variable independiente, puede ser expresada mediante el modelo matemático general:

$$Y = \beta_0 X_1^{\beta_1} \cdot X_2^{\beta_2} \cdot X_3^{\beta_3} \quad (11)$$

Donde $\beta_0, \beta_1, \beta_2$ y β_3 , son parámetros del modelo, a ser determinados (en cada caso) en base a la información experimental, por el método de los cuadrados mínimos (análisis de regresión múltiple, multivariado o multidimensional).

5. Contrastación o comprobación de las hipótesis:

En esta etapa, se ha procedido como sigue:

- Cálculo del coeficiente de correlación, R, o, determinación, R², que expresa la “fortaleza” de la relación matemática entre la variable dependiente y las variables independientes. Este es un primer indicador de “idoneidad” de los modelos.
- Prueba de valores observados (medidos experimentalmente) contra valores calculados (usando el modelo). El modelo se dice “idóneo”, cuando los primeros son iguales a los segundos, o, las pequeñas diferencias, que siempre se presentan, se atribuyen a errores de muestreo.
- Análisis de residuales, que deben tener una fluctuación aleatoria, tomando como referencia el cero.
- Distribución de residuales, que debe ser aproximadamente normal).

Si estas pruebas, especialmente las dos primeras, son satisfactorias, las hipótesis están contrastadas o comprobadas y, en consecuencia, se ratifica su cualidad de ley.

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

Bolivia tiene seis provincias fisiográficas o

geológicas, a saber:

- (I) Cordillera Occidental;
- (II) Altiplano;
- (III) Cordillera Oriental;
- (IV) Sub-andino;
- (V) Llanura Chaco-Beniana;
- (VI) Escudo Brasileño.

(Los números romanos identifican a las seis provincias fisiográficas o geológicas y serán mantenidos como tales en todo el trabajo).

Considerando estas provincias fisiográficas, se han seleccionado los proyectos viales más relevantes, que cuentan con información experimental representativa, relativas a las variables consideradas en la investigación. Entre estos proyectos, se tienen: Patacamaya-Tambo Quemado, Oruro-Pisiga San Cristóbal-Frontera, La Paz-Oruro, Oruro-Potosí, Potosí-Tarija, Potosí-Villazón, Cochabamba-Oruro, Padcaya-Bermejo, Tarija-Villa Montes, Abapó-Camiri, Santa Cruz-Puerto Suárez, Naureda-Extrema, Puerto Rico-Sena, Ixiamas-Chivé, San Borja-Trinidad, Santa Cruz-Puerto Suárez, Porvenir-El Chorro y Riberalta-Guayaramerín (Ministerio de Obras Públicas-ABC, 1970-2015).

CBR (Y) en función de una variable (análisis de regresión simple o unidimensional):

Una vez analizada, seleccionada y sistematizada la información experimental, se han constituido las series estadísticas de trabajo. En lugar de presentar estas series, por razones de extensión (ya que son 18 series), se han calculado los indicadores estadísticos más relevantes.

Estos indicadores, para los modelos simples $Y = f(X_0)$, se presentan en el cuadro N° 1.

CUADRO N° 1: Indicadores estadísticos modelos simples: $Y = f(X_0)$

Var.		S	Min.	Max.
(I) Cordillera Occidental (n = 18)				
Y	12.97	18.00	1.60	74.40
X_0	8.5	5.34	0.00	17.00
(II) Altiplano (n = 29)				
Y	3.76	3.02	1.30	15.00
X_0	15.39	10.45	0.00	37.00
(III) Cordillera Oriental (n = 19)				
Y	8.57	14.65	2.20	66.80
X_0	7.16	4.65	0.00	16.00
(IV) Sub-andino (21)				
Y	9.27	10.80	2.20	50.00
X_0	9.29	6.80	0.00	27.00
(V) Llanura Chaco-Beniana (n = 33)				
Y	7.27	12.86	1.20	77.20
X_0	16.58	9.64	0.00	35.00
(VI) Escudo Brasileño (n = 42)				
Y	3.36	5.71	1.2	37
X_0	22.38	13.22	0	52

(Fuente: Elaboración propia)

Los resultados de los modelos matemáticos más idóneos (con un 95% de confiabilidad), correspondientes, se reflejan en el cuadro N° 2.

CUADRO N° 2: Resultados primera hipótesis $Y = f(X_0)$

P.F.	V.I.	A	B	R
(I)	X_0	64.27	0.85	0.988
(II)	X_0	42.7	3.01	0.976
(III)	X_0	26.25	0.39	0.998
(IV)	X_0	48.42	0.97	0.989
(V)	X_0	61.35	0.80	0.998
(VI)	X_0	29.96	0.71	0.989

(Fuente: Elaboración propia)

Análogamente, otros modelos simples (Y en función de X_1, X_2 o X_3) se han probado, siempre en términos de la primera hipótesis. Los indicadores estadísticos se presentan en el cuadro N° 3.

CUADRO N° 3 Indicadores estadísticos otros modelos simples

Var.	\bar{M}	S	Min.	Max.
(I) Cordillera Occidental (n = 30)				
Y	21.15	19.83	3.00	83.00
X ₃	42.95	23.06	9.20	94.30
(II) Altiplano (n = 28)				
Y	4.16	5.85	1.3	30.8
X ₂	18.59	7.93	1.7	34.5
(III) Cordillera Oriental (n = 22)				
Y	16.64	28.71	2.2	108.3
X ₃	51.52	21.00	9.5	79.9
(IV) Sub-andino (n = 23)				
Y	14.62	21.00	2.20	80.00
X ₃	56.67	25.25	9.60	96.00
(V) Llanura Chaco-Beniana (n = 37)				
Y	12.46	24.82	2.8	129.00
X ₂	16.47	8.32	2.3	33.80
(VI) Escudo Brasileño (n = 36)				
Y	6.70	12.18	1.30	57.00
X ₂	25.81	11.54	3.90	48.80

(Fuente: Elaboración propia)

Y, los resultados de los modelos matemáticos más idóneos (con un 95% de confiabilidad), que corresponden, se reflejan en el cuadro N° 4.

CUADRO N° 4: Resultados primera hipótesis otros modelos simples

P.F.	V.I.	A	B	R
(I)	X ₃	508.82	- 3.19	0.993
(II)	X ₂	49.63	- 0.10	0.989
(III)	X ₃	422.29	- 5.79	0.987
(IV)	X ₃	448.64	- 3.80	0.983
(V)	X ₂	99.51	- 1.55	0.987
(VI)	X ₂	69.11	- 2.71	0.998

(Fuente: Elaboración propia)

De los cuadros N° 2 y N° 4, se obtienen los modelos matemáticos (ecuaciones) simples. Por ejemplo, considerando los valores del cuadro N° 2 (tercera fila), se tiene para el Altiplano (II):

$$Y = \frac{42.70}{(X_0+3.01)} \quad (12)$$

Análogamente, del cuadro N° 4, por ejemplo, para la Llanura Chaco-Beniana (V), se tiene:

$$Y = \frac{99.51}{(X_2 - 1.55)} \quad (13)$$

CBR (Y) en función de más de una variable independiente (análisis regresión múltiple o análisis multivariado):

Los indicadores estadísticos, para cada caso, se presentan en el cuadro N° 5.

CUADRO N° 5: indicadores estadísticos modelos múltiples

Var.		S	Min.	Max.
(I) Cordillera Occidental (n = 50)				
Y	35.06	25.43	3.00	103.00
X ₁	29.10	8.64	16.80	58.40
X ₃	31.18	21.53	8.00	94.30
(II) Altiplano (n = 25)				
Y	5.56	6.25	1.6	30.8
X ₂	16.60	7.80	1.7	33.3
X ₃	72.92	19.25	35.2	97.0
(III) Cordillera Oriental (n = 23)				
Y	19.65	30.33	2.20	108.30
X ₁	33.92	11.33	19.60	55.70
X ₃	51.21	20.47	9.50	79.90
(IV) Sub-andino (n = 26)				
Y	15.92	20.72	2.20	80.00
X ₃	55.15	24.20	9.60	96.00
(V) Llanura Chaco-Beniana (n = 33)				
Y	13.15	28.07	2.80	129.00
X ₂	17.40	8.58	2.30	33.80
X ₃	82.92	21.38	20.90	99.40
(VI) Escudo Brasileño (n = 39)				
Y	4.17	7.86	1.20	48.00
X ₂	28.37	9.20	4.20	48.00
X ₃	70.56	19.26	25.2	98.00

(Fuente: Elaboración propia)

En este caso, si bien se tienen 3 variables independientes (X1, X2 y X3), cuyos significados se han establecido en 4.3, los modelos matemáticos más idóneos no siempre incluyen todas estas variables. Así, con un 95% de confiabilidad, para la segunda hipótesis, se han obtenido los resultados reflejados en el cuadro N° 6.

CUADRO N° 6: Resultados segunda hipótesis

β_0	β_1	β_2	β_3
(I) Cordillera Occidental ($R^2 = 0.973$)			
8078	-0.60		-1.18
(II) Altiplano ($R^2 = 0.970$)			
3103		-0.89	-1.01
(III) Cordillera Oriental ($R^2 = 0.940$)			
466251	-1.17		-1.37
(IV) Sub Andino ($R^2 = 0.887$)			
3429			-1.53
(V) Llanura Chaco-Beniense ($R^2 = 0.968$)			
30887		-0.48	-1.66
(VI) Escudo Brasileño ($R^2 = 0.937$)			
3513		-1.02	-0.92

(Fuente: Elaboración propia)

En los cuadros N° 1, 3 y 5:

- Var. = Variable;
- \bar{M} = Media aritmética;
- S = Desviación estándar;
- Min. = Valor mínimo de la serie;
- Max. = Valor máximo de la serie;
- n = Tamaño de la muestra (serie de trabajo).

En los cuadros N° 2, 4 y 6:

- R = Coeficiente de correlación;
- R^2 = Coeficiente de determinación.

Las casillas en blanco del cuadro N° 6, significan que la variable en cuestión no interviene en el modelo. Por ejemplo, el modelo (ecuación) correspondiente la Cordillera Occidental (I), es:

$$Y = \frac{8078}{(X_1^{0.60} X_3^{1.18})} \quad (14)$$

Análogamente, el modelo (ecuación) del Escudo Brasileño es:

$$Y = \frac{3513}{(X_2^{1.02} X_3^{0.92})} \quad (15)$$

De la misma manera, se tienen los modelos para cada una de las provincias fisiográficas.

En suma, se han obtenido 18 modelos matemáticos, 3 para cada una de las seis provincias fisiográficas de Bolivia (Cuadros N° 2, N° 4 y N° 6).

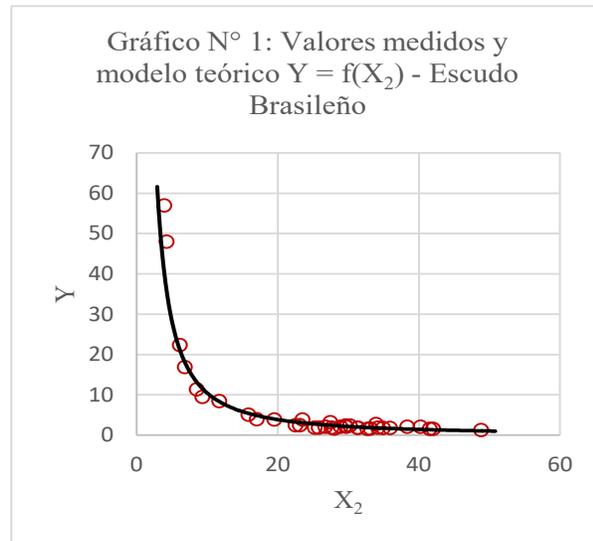
Con fines didácticos, se ejemplifica, a

continuación, la secuencia general de las fases más relevantes, seguidas para la obtención de cada uno de los modelos:

- Si se considera la serie de datos de la Provincia Fisiográfica VI, una vez sometida al análisis de correlación y regresión la función $Y = f(X_2)$, es decir, CBR en función del índice de plasticidad, se obtiene, como modelo más idóneo (entre muchos), aquel cuyos parámetros se encuentran en la última fila del cuadro N° 4. Entonces, el modelo (a un 95% de confiabilidad) es:

$$Y = \frac{69.11}{(X_2 - 2.71)} \quad (16)$$

Tanto la curva teórica (modelo) como los pares de puntos correspondientes a la serie experimental se presentan en el Gráfico N° 1.

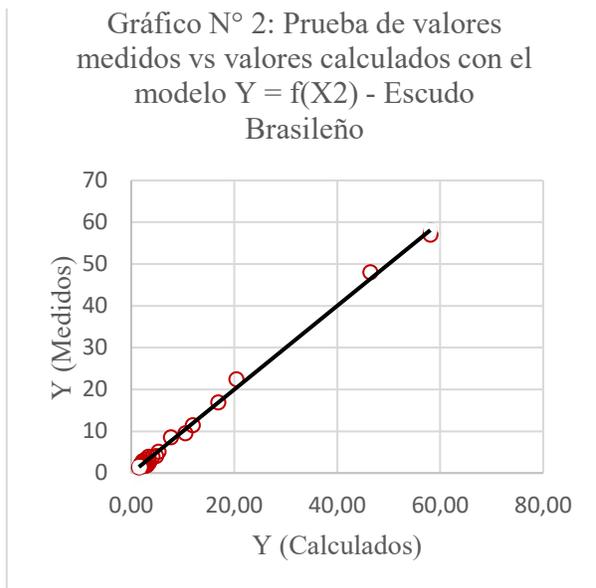


(Fuente: Elaboración propia)

- El coeficiente de correlación (Cuadro N° 4) es alto, lo que implica una medida de la fortaleza de la relación entre ambas variables (99.80%).
- La prueba de valores observados (medidos) contra valores calculados (con el modelo), para ser satisfactoria, al ser graficados, deben aproximarse a una recta cuya pendiente sea igual a uno y cuya ordenada al origen sea cero. Estos pares de valores (Observados,

Calculados), se representan en el gráfico N° 2, lo que indica que la prueba es satisfactoria.

- Prueba de residuales. Idealmente, los residuales o errores, (ϵ) , al ser graficados, deben mostrar realmente fluctuaciones aleatorias alrededor de un valor cero, tal y como se muestra en el gráfico N° 3.
- La distribución de los residuales debe ser aproximadamente normal. Para realizar esta prueba, hay varias opciones. En este caso se ha usado la prueba de Kolmogorov-Smirnov, que arrojó la siguiente conclusión: *No se puede rechazar la idea de que la variable "residuales" provenga de una distribución normal, con un 95% de confiabilidad.*



(Fuente: Elaboración propia)

En consecuencia, se contrasta o comprueba la hipótesis formulada.

De manera análoga, se ha procedido en cada uno de los 18 modelos, que responden a las dos hipótesis formuladas.

Consecuentemente, las hipótesis se convierten en leyes.

Análisis matemático y empírico

Un breve análisis y discusión de cualquiera de los modelos obtenidos, usando elementos del cálculo diferencial, permite realizar algunas consideraciones, teóricas y empíricas. Para esto, como ejemplo, se toma el modelo de la ecuación (16).

Es fácil establecer (teóricamente) que:

$$\lim_{X_2 \rightarrow \infty} Y = 0$$

$$\lim_{X_2 \rightarrow 0} Y = \infty$$

Es decir, el eje X_2 es una asíntota. Igualmente la variable Y , se vuelve asíntótica en $X_2 = 2.71$ (asíntota vertical).

Albert Einstein dijo: "cuando no se refieren a la realidad, las matemáticas son exactas, en tanto que, si se refieren a la realidad no son exactas". Consecuentemente, los límites expresados anteriormente, si bien son teóricos, sirven para interpretar una realidad empírica, a saber:

$$\lim_{X_2 \rightarrow \text{grande}} Y = \text{pequeño}$$

$$\lim_{X_2 \rightarrow \text{pequeño}} Y = \text{grande}$$

Lo cual es coherente con la realidad empírica, pues, tanto el modelo como los datos experimentales usados, expresan que en esta provincia fisiográfica (VI), el CBR (Y) varía de manera inversa con el índice de plasticidad (X_2), tal y como lo muestra, también, el gráfico N° 1.

También, puede verse que:

$$\lim_{X_2 \rightarrow 2.71} Y = \infty$$

Pero, el valor mínimo de X_2 , considerado en la serie estadística de trabajo (mediciones experimentales) es igual a 3.90 (última fila, cuarta columna del Cuadro N° 3). Por tanto, el valor $X_2 = 2.71$, cae fuera del rango de datos considerado en la formulación del modelo. El mínimo valor que debe usarse es $X_2 = 3.90$. Para este valor:

$$\lim_{X_2 \rightarrow 3.90} Y = 58.08$$

Resultado que es coherente con la realidad empírica,

casi igual al valor máximo del CBR experimental considerado, que es igual a 57 (penúltima fila, última columna del Cuadro N° 3).

Similarmente:

$$\lim_{X_2 \rightarrow 48.80} Y = 1.50$$

Siendo 48.80, el máximo valor experimental de X_2 (índice de plasticidad). El valor de 1.50 (para Y), es cercano al empírico (1.30), reflejado en el mismo cuadro.

¿Qué pasa con las pendientes (derivadas) en la curva que corresponde al modelo matemático (Gráfico N° 1)?

Las respuestas se presentan en los párrafos siguientes.

La derivada de Y, respecto de X_2 es:

$$\frac{dY}{dX_2} = - \frac{69.11}{(X_2 - 2.71)^2}$$

Es claro que, para $X_2 = 2.71$, la pendiente (derivada) se hace infinita (negativa), lo cual no es práctico, pero basta reemplazar $X_2 = 3.90$ (mínimo valor experimental de X_2) para establecer que, para valores pequeños de X_2 (índice de plasticidad), la pendiente se hace grande (en valor absoluto), igual a -48.80, en este caso.

Similarmente, cuando X_2 se hace tan grande como se quiera, la pendiente (derivada) tiende a cero. Si se reemplaza $X_2 = 48.80$ (máximo valor experimental), se aprecia que la derivada (pendiente) se hace muy pequeña, igual a -0.033, es decir, prácticamente horizontal, lo que ratifica la tendencia asintótica con el eje horizontal.

Similares análisis matemáticos pueden hacerse para todos los otros modelos.

5. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES:

5.1 Conclusiones

1. Al haber determinado las leyes de variación de la capacidad portante de los suelos, en función de otras variables de más simple medición experimental, expresadas en términos de modelos matemáticos (ecuaciones), mismos que permiten predecir (estimar) el CBR sin recurrir a ensayos de laboratorio, se han logrado los dos primeros objetivos diseñados para la investigación.
2. Habiendo comparado los valores del CBR (Y), observados (laboratorio) con los valores estimados (modelos), siendo las diferencias pequeñas (atribuibles a errores de muestreo), se concluye que, a tiempo de dimensionar estructuras de pavimentos, las diferencias se pierden en el redondeo, habitual en el ingeniero, cuando se definen los espesores de las diferentes capas del paquete estructural. Consecuentemente, se ha alcanzado el tercer objetivo propuesto, estableciendo, además, la utilidad práctica en la aplicación de los modelos.
3. Las pruebas, tanto estadísticas, como prácticas, han conducido a la contrastación o comprobación de las dos hipótesis formuladas, mismas que, en consecuencia, se constituyen en leyes de variación de la capacidad portante de los suelos ($CBR = y$) en función de las otras variables consideradas ($X_0, X_1, X_2, y X_3$), tanto para los modelos simples (primera hipótesis), como para los modelos múltiples (segunda hipótesis), para cada una de las seis provincias fisiográficas o geológicas de Bolivia.
4. Los modelos matemáticos formulados expresan una realidad empírica que puede resumirse en los siguientes términos:
 - Los resultados de los modelos, reflejados en el cuadro N° 4 indican que en las provincias fisiográficas donde se tiene una presencia mayoritaria de suelos granulares (I, III y IV), el CBR depende de una propiedad granulométrica (X_3).

- En tanto que, cuando la realidad empírica (datos experimentales) reflejan una mayor presencia de suelos finos (zonas II, V y VI), los resultados del cuadro N° 4 indican que el CBR depende de una propiedad plástica (X_2).
 - Sin embargo, en el caso de los modelos múltiples, solo en el sub-andino el CBR es una función de X_3 (propiedad granulométrica), ya que, en las otras provincias, es una función de una propiedad plástica (X_1 o X_2) y de una propiedad granulométrica (X_3).
5. La matemática permite realizar análisis interesantes. En este caso, conduce a visualizar los valores extremos (máximos y mínimos), tanto de la variable dependiente, como de las independientes.

5.2 Recomendaciones

- a) Usar los modelos formulados solo para los valores (tanto de la variable dependiente como de las variables independientes), comprendidos en los rangos de las series estadísticas utilizadas, cuyos valores máximos y mínimos se precisan en los cuadros N° 1, N° 3 y N° 5, pues, la extrapolación fuera de estos rangos, podría arrojar resultados alejados a la realidad empírica.
- b) En todos los modelos formulados y en las series estadísticas usadas, se han considerado suelos que tienen un índice de plasticidad diferente de cero. Se recomienda, en futuras investigaciones, realizar un trabajo similar, con suelos con índice de plasticidad igual a cero.

6. AGRADECIMIENTO:

El autor agradece al Dr. Adrián Rodríguez-Marek, (Departamento de Ingeniería Civil y Ambiental del Virginia Tech, USA), quien ha revisado una primera versión de este trabajo de investigación, realizando sugerencias y observaciones importantes.

7. REFERENCIAS:

Agarwal, K.B. y Ghanekar, K.D. (1970). Prediction of CBR from plasticity characteristics of soils. Proceedings of 2nd South-East Asian Conference on Soil Engineering, pp. 571-576, Singapore.

Ameratunga, J., Sivakugan, N. y Das, B. (2016). Correlation of soil and rock properties in geotechnical engineering. Springer, India.

ASTM D1883-07e2 (2007). Standard Test Method for CBR (California Bearing Ratio) of Laboratory-Compacted Soils. American Society for Testing of Materials, Pennsylvania, USA.

Benítez, A. (2014). Dialéctica de la Ingeniería Estructural. Tesis de Doctorado en Ingeniería Civil UNSXX-Convênio Andrés Bello, La Paz.

Benítez, A. (2012). Propiedades mecánicas de los suelos, correlaciones, modelos matemáticos e implicaciones en la ingeniería vial. XVI Congreso Argentino de Vialidad, 22-26 de octubre, Córdoba.

Benítez, A (2004). Generalización de las relaciones entre los procesos del ciclo hidrológico para la cuenca internacional del río de La Plata: "Enfoque Sistémico y Análisis Multivariado". Tesis de doctorado, Universidad de Sevilla, España.

Bunge, M. (2011). La investigación científica. Siglo Veintiuno Editores, México.

Carter, M. y Bentley, S.P. (1991). Correlations of soil properties. Pentech Press, London.

Chalmers, A.F. (1999). ¿Qué es esa cosa llamada ciencia? Siglo Veintiuno de España Editores, Madrid.

Gutiérrez, R. (1996). Introducción al método científico. Esfinge, México.

Magnan, J.P. (1982). Les méthodes statistiques et probabilistes en mécanique des sols. Presses de l'école nationale des Ponts et Chaussées, Paris.

Mendenhall, W. y Sincich, T. (1997). Probabilidad y Estadística para Ingeniería y Ciencias. Prentice Hall. México.

Ministerio de Obras Públicas-ABC (1970-2015). Varios estudios de carreteras a nivel de diseño final o TESA. La Paz.

Patel, S.R. and Desai, M.D. (2010). CBR Predicted by Index Properties for Alluvial Soils of South Gujarat. Dec. 16-18, 79-82, Proceedings of Indian Geotechnical Conference–2010, India.

Terzaghi, K. y R. Peck (1967). Soil mechanics in engineering practice. John Wiley, Lodon.

Vinod, P. and Reena, C. (2008). Prediction of CBR Value of Lateritic Soils Using Liquid Limit and Gradation Characteristics Data, Highway Research Journal, IRC, 1 (1): 89-98.