

DISEÑO ÓPTIMO DE VIGAS DE HORMIGON ARMADO SOMETIDAS A FLEXION DISEÑO INTEGRAL COSTO vs RESISTENCIA

OPTIMUM DESIGN OF REINFORCED CONCRETE BEAMS SUBJECTED TO BENDING INTEGRAL DESIGN COST VS STRENGTH

Álvarez Gozalvez Ernesto¹

¹ Docente de la Carrera de Ingeniería Civil – Departamento de Estructuras – Carrera de Ing. Civil Facultad de Ciencias y Tecnología – Universidad Autónoma “Juan Misael Saracho”

Correo electrónico: ernesto-217@hotmail.com

RESUMEN

El presente trabajo trata sobre el diseño de vigas de hormigón armado, mediante un modelo matemático que permite minimizar el costo de una viga plana o losa maciza unidireccional, una viga rectangular y una viga de sección T simplemente reforzadas, todas sometidas a flexión. Se propone un procedimiento de diseño simultáneo que integra la relación costo con la resistencia a la flexión de la viga. Para lograr este objetivo se recurre a técnicas de optimización matemática dentro del cálculo diferencial, basadas principalmente en la aplicación de la teoría de máximos y mínimos además de los requisitos de diseño recomendados por la norma ACI 318-08. Mediante este procedimiento de máximos y mínimos la solución se obtiene cuando la función costo se convierte en tangente en el punto de óptima solución de la función de restricción y dentro del rango del dominio permisible. Finalmente los resultados encontrados son comparados y validados con los resultados obtenidos mediante el diseño tradicional.

Palabras Clave: restricción, variable de diseño, dominio permisible, costo, resistencia, flexión.

ABSTRACT

This paper discusses the design of reinforced concrete beams, using mathematical model that minimizes the cost of single beam, unidirectional solid slab, and a rectangular simply reinforced T-beam, all subjected to bending stresses. It proposes a procedure of concurrent design that integrates the cost to the bending of the beam. To achieve this goal, we take out optimization techniques based mainly on the application of the theory of maximum and minimum as well as the design requirements recommended by the ACI – 318-08 standard is used. Through this procedure of

maximum and minimum, the solution is obtained when the function cost converts in tangent in the point of optimal solution of the function of restriction and within the range of the domain permissible. Finally the results are compared and validated with the results obtained using the traditional design.

Key words: restriction, design variable, permissible dominium, cost, strength, flexion.

INTRODUCCION

Por muchos años, el diseño en ingeniería estructural, ha estado basado en un procedimiento conocido como el de “prueba y error”; (Borda F.J.) es decir que, si un determinado elemento estructural era seleccionado para cumplir una determinada función estructural el procedimiento consistía en transitar paso a paso dentro del proceso de diseño, llevando adelante ciertos cambios en las variables de diseño y que finalmente por comparación entre el diseño precedente y el último, con la respectiva verificación de las condiciones impuestas se podía decidir se había alcanzado el diseño deseado; caso contrario el procedimiento continuaba con una nueva comparación y así sucesivamente hasta encontrar el diseño considerado por el proyectista como el suficientemente aceptable.

Hoy todavía, el diseño de estructuras se realiza siguiendo este proceso iterativo, se parte de un diseño inicial, que es analizado para conocer su respuesta a las acciones exteriores y luego se comprueba si esta es segura y adecuada. Si la comprobación resulta satisfactoria, se finaliza el diseño; en caso contrario, se realiza una fase de síntesis, que a partir de los resultados encontrados se procede a un nuevo diseño. Este diseño se analiza de nuevo y el proceso se repite hasta alcanzar un diseño satisfactorio. Este método, denominado de prueba y error, presenta

el inconveniente de que las modificaciones dependen de la experiencia del diseñador, o de datos iniciales suficientemente cerca del resultado final y de esta manera se obtiene soluciones que no siempre son las mejores, y además con un alto costo de tiempo del diseñador.

Con el uso de planillas de cálculo electrónicas preparadas expresamente para el diseño de estructuras, así como de algún software especializado, los ingenieros dedicados al diseño estructural, en su mayoría están casi siempre tentados en asumir y validar los resultados de un determinado diseño estructural, luego de haber establecido la correspondiente verificación del comportamiento estructural a través de su resistencia y funcionalidad. Sin embargo un parámetro también determinante de todo diseño es el costo económico de la estructura para su factibilidad de ejecución, situación que en un procedimiento de cálculo tradicional siempre se aborda como la etapa final de todo diseño.

Este trabajo pretende mostrar que con el uso de las técnicas de optimización basados en el cálculo diferencial y la teoría de máximos y mínimos se plantean algoritmos matemáticos claramente definidos y manejados a través de planillas electrónicas, que hacen posible integrar en el diseño estructural la relación costo-resistencia. Para el caso de los requisitos y restricciones al comportamiento de vigas sometidas a flexión, se recurre a las especificaciones de diseño según la Norma Americana ACI-318-08 que especifica los criterios y requisitos de diseño basados en el comportamiento a la resistencia última.

Los procedimientos de optimización aplicados al diseño estructural, resultan una alternativa a la metodología mencionada en líneas arriba. Este se basa fundamentalmente en una formulación precisa del proceso de diseño, donde se establece una función objetivo en la que intervienen

simultáneamente todas las demás variables de diseño con sus respectivas restricciones, las mismas que pueden ser impuestas por las normas de diseño y/o construcción, así como por las propiedades mecánicas de los materiales empleados en el diseño.

FORMULACION GENERAL DEL PROBLEMA DE OPTIMIZACION

A partir del planteamiento general que se tiene sobre un diseño en ingeniería estructural, se establece la existencia de un número de propiedades estructurales, a las que podemos denominarlas: variables de diseño y que con la finalidad de alcanzar la configuración "ideal", estas pueden ser modificadas a lo largo de todo el proceso, cuidando en todo momento que no se violenten las condiciones iniciales del problema (Hernández S.). Por lo tanto este juego de variables se define como el conjunto de las variables de diseño que cumplen con alguna condición de restricción:

$$g_i(\underline{X}) \leq 0 \quad (i = 1, \dots, n)$$

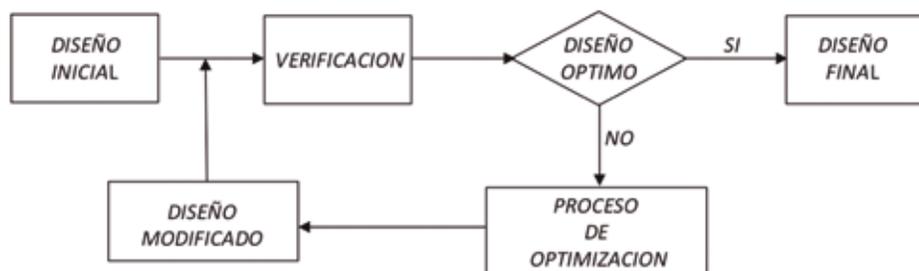
Por otro lado, cierta clase de optimización requiere establecer la propiedad estructural que se pretende optimizar. Esta condición es usualmente llamada la función objetivo $F(\underline{X})$. Por lo tanto, la formulación matemática de la optimización estructural usualmente se expresa de la siguiente manera:

Optimice: $F(\underline{X})$

Sujeto a: $g_i(\underline{X}) \leq 0 \quad (i = 1, \dots, n)$

El procedimiento descrito y expresado matemáticamente por la ecuación (1) puede ser resuelto recurriendo a métodos numéricos para optimización, (Pike R. W.) junto a un proceso iterativo como el que se muestra en el figura N° 1.

Figura 1. Diagrama de Flujo – Optimización estructural



PROCEDIMIENTO DE OPTIMIZACION PROPUESTO

El procedimiento de optimización propuesto para el diseño estructural de vigas sometidas a flexión, resulta ser una alternativa a la metodología tradicional. Está basado fundamentalmente en una formulación precisa de una función objetivo en la que intervienen simultáneamente todas las variables de diseño y que a la vez son controladas por sus respectivas restricciones, las mismas que pueden ser impuestas por las normas de diseño establecidas en el código ACI-318-08 (Morales M.R.), así como por las propiedades mecánicas de los materiales empleados en el diseño.

Matemáticamente, el proceso se basa en expresar tanto la función objetivo, como la funciones de restricción, como una sola expresión de las variables de diseño identificadas en el problema, se escoge una como la variable de diseño principal, mientras que las otras son expresadas en función de esta y son controladas por las condiciones de restricción impuestas y la condición de no negatividad, esta última garantiza la condición de mínimo alcanzado, (Martí P.) Si se verifica el dominio de la función principal y si se cumplen las condiciones de restricción para todas las demás variables se asegura haber alcanzado el mínimo del problema propuesto.

Los siguientes pasos resumen el problema de optimización con máximos y mínimos:

1. Identificar todas las variables de diseño a determinar.
2. Identificar y escribir la función objetivo para la variable de diseño principal que se quiere hacer mínima.
3. Identificar y escribir la función de restricción que relaciona la variable de diseño principal con el resto de las variables dependientes.
4. Escribir la función objetivo en función de la variable de diseño principal.
5. Identificar el dominio de la función objetivo y que los límites de las condiciones impuestas, estén dentro del rango de las restricciones del problema.
6. Aplicar la teoría de máximos y mínimos para calcular el mínimo de la función resultante.

DISEÑO INTEGRAL COSTO vs RESISTENCIA

Se plantea el diseño de vigas de hormigón armado sometidas a flexión, considerando que las losas macizas unidireccionales son también vigas planas en una dirección, se las incluye también en el análisis respectivo, por lo que el presente trabajo se reduce al análisis y diseño de los siguientes grupos:

- Losa maciza unidireccional o viga de ancho "b" conocido.
- Viga rectangular simplemente reforzada.
- Viga T simplemente reforzada.

FORMULACION DEL PROBLEMA DE OPTIMIZACIÓN

Función Objetivo.-

Se plantea la función objetivo como la minimización del costo de la viga de hormigón armado por unidad de longitud, expresada en función de tres variables de diseño como son: la base "b" de la viga, el peralte "d" efectivo y el área de refuerzo por flexión "As". Empleando estas variables de diseño, la función objetivo de manera general se expresa de la siguiente forma:

$$C_{\min} = C_s A_s + C_c (1+t)bd + C_e [b + 2(1+t)d] \quad (2)$$

Donde:

- Cs Costo del acero de refuerzo incluyendo la mano de obra e impuestos en \$US/cm³.
- Cc Costo del hormigón incluyendo la mano de obra e impuestos en \$US/cm³.
- Ce Costo del encofrado incluyendo la mano de obra e impuestos en \$US/cm².
- b,d Base y peralte efectivo de la viga en cm respectivamente.
- As Área del acero de refuerzo en cm².

Restricciones Geométricas y de Resistencia a la flexión.-

De acuerdo con el Código del Instituto Americano del Concreto (ACI 318-08), se asumen las siguientes hipótesis (ACI):

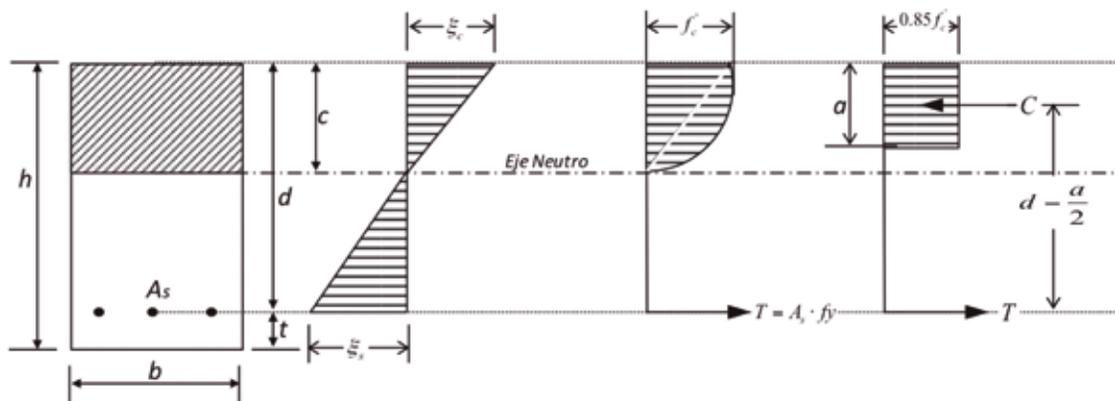
- El concreto no podrá desarrollar una fuerza de compresión mayor a la de su resistencia $f'c$.
- El concreto tiene una resistencia a la tracción muy pequeña y su fisuración cuando esta alcanza aproximadamente el 10% de su resistencia $f'c$, por lo que se asume que el acero absorbe toda la fuerza de tracción.
- La relación esfuerzo-deformación del concreto se considera lineal aproximadamente hasta que alcanza el 50% de su resistencia.
- Las secciones planas antes de la flexión, permanecen planas y perpendiculares al eje neutro después de la flexión.
- La deformación unitaria máxima del concreto en la rotura es de $\xi = 0.003$

Según el método de los factores de carga y resistencia, para el diseño es importante conocer la distribución de los esfuerzos normales dentro de la zona crítica en compresión del hormigón.

Según Whitney (Morales M.R.) la distribución de esfuerzos en la zona de compresión del bloque de concreto en la zona crítica, de manera práctica se

asume como rectangular, cuyas características se muestran en la figura N° 2.

Figura 2. Distribución de esfuerzos y deformación unitaria en una sección de H°A°



Donde:

- As Área del acero de refuerzo a optimizar.
- d Peralte efectivo de la viga a optimizar.
- b Ancho de la viga a optimizar.
- t Relación entre el recubrimiento (r) y el peralte efectivo (d): $t = r/d$
- f_y Esfuerzo de fluencia en el acero.
- f'_c Resistencia a la compresión en el hormigón.
- c Profundidad del Eje Neutro en la sección rectangular.
- a Profundidad del bloque de compresión: $a = \beta_1 \cdot c$; con $\beta_1 = 0.85$ para resistencias del concreto menor a 280 Kg/cm^2 .
- ζ_c Deformación unitaria en el hormigón.
- ζ_s Deformación unitaria en el acero.

Para el diseño por flexión, se debe saber que el tipo de falla deseable es la falla dúctil, con la cual la sección desarrolla grandes deformaciones. En estas condiciones el Código ACI-318-08 establece los límites para la cantidad de acero, tomando control mediante la cuantía balanceada, la misma que está definida de acuerdo con la siguiente relación:

$$\rho_b = \beta_1 \cdot 0.85 \cdot \frac{f'_c}{f_y} \left(\frac{6000}{6000 + f_y} \right) \quad (3)$$

La cuantía geométrica, está relacionada directamente con el área de acero " A_s " e inversamente con el peralte efectivo de la sección rectangular de la viga " d " a través de la siguiente relación:

$$\rho = \frac{A_s}{b \cdot d} \quad (4)$$

Cuantía máxima:

$$\rho_{\max} = 0.75 \cdot \rho_b \quad (5)$$

Cuantía mínima:

Para vigas y losas en una dirección se tomará el mayor de los dos siguientes valores:

$$\rho_{\min} = \frac{14}{f_y} \quad \text{ó} \quad \rho_{\min} = 0.80 \cdot \frac{\sqrt{f'_c}}{f_y} \quad (6)$$

y donde f'_c y f_y están en Kg/cm^2

Por lo tanto de esta restricción establecida por el Código, se desprende la primera restricción de carácter geométrico impuesta al diseño, y se puede expresar de la siguiente manera:

$$\rho_{\min} \leq \rho_{\text{óptima}} \leq \rho_{\max} \quad (7)$$

Por otro lado, las dimensiones de la sección transversal " b " y " d " de la viga, pueden manejarse como dos variables de diseño independientes, sin embargo para fines prácticos y con la finalidad de reducir el número de estas variables, se establece la siguiente relación:

$$\beta = \frac{b}{d} \quad (8)$$

Según el ACI 318-08, el ancho " b " de la viga, no debe ser menor que el más pequeño de $0.30h$ y 25 cm tomando el primero se genera la restricción de la relación " β " entre el ancho y el peralte efectivo.

$$0.30(1+t) \leq \beta_{\text{óptima}} \leq 60 \text{ cm} \quad (9)$$

El Código ACI 318-08, también establece un criterio fundamental de diseño basado en los factores de carga y de resistencia, el mismo que se expresa de acuerdo con la siguiente expresión:

$$\phi M_n \geq M_u \quad (10)$$

Para vigas de hormigón armado sometidas a flexión, establece que el factor de reducción “ ϕ ” que afecta al momento nominal “ M_n ” debe ser igual a 0.90; mientras que el momento último “ M_u ” es calculado multiplicando la carga de servicio por sus respectivos factores de mayoración, de esta manera, la expresión (9) queda de la siguiente manera:

$$\phi M_n = \phi \left[A_s \cdot f_y \left(d - \frac{a}{2} \right) \right] \geq 1.2M_{DL} + 1.6M_{LL} \quad (11)$$

Donde:

M_{DL} Momento por carga muerta (en nuestro caso se considera como tal el peso propio de la viga) en Kg.cm.

M_{LL} Momento por carga viva actuando sobre la viga en Kg.cm.

La profundidad “ a ” del bloque de compresión, se establece a partir del equilibrio de fuerzas internas entre las resultantes de Tensión y Compresión, de donde se obtiene con ayuda de la figura N° 2:

$$\Sigma F = 0 ; C = T ; 0.85 \cdot f'_c \cdot a \cdot b = A_s \cdot f_y \quad (12)$$

$$a = \frac{A_s \cdot f_y}{0.85 \cdot f'_c \cdot b}$$

Finalmente la restricción de comportamiento a flexión queda expresada de la siguiente forma:

$$\phi \left[A_s \cdot f_y \left(d - \frac{A_s \cdot f_y}{1.7 \cdot f'_c \cdot b} \right) \right] - 1.2\alpha \cdot \gamma_c \cdot b \cdot (1+t) \cdot d \cdot L^2 - 1.6 \cdot M_{LL} \geq 0 \quad (13)$$

Donde:

- α Coeficiente del momento y depende de las condiciones de apoyo de la viga. ($\alpha = 0.125$ para viga simplemente apoyada).
- γ_c Peso por unidad de volumen del hormigón en Kg/cm³.
- t Relación del recubrimiento al peralte efectivo de la viga ($t = r/d$).
- L Longitud entre apoyos de la viga en cm
- ϕ Factor de reducción de resistencia (0.90 para flexión).

APLICACIÓN A VIGAS SOMETIDAS A FLEXION

Caso I.- Losa maciza unidireccional o viga simplemente reforzada VSR I de ancho “ b ” conocido.-

En este caso se asume la variable “ b ” constante e igual a 100 cm de ancho, dejando como variables de diseño las otras dos variables “ d ” y “ A_s ”. Entonces el problema de optimización se plantea de la siguiente manera:

Optimice:

$$C = C_s A_s + C_c (1+t) 100d + C_e [100 + 2(1+t)d] \quad (2-a)$$

Sujeto a: (13-a)

$$\phi \left[A_s \cdot f_y \left(d - \frac{A_s \cdot f_y}{170 \cdot f'_c} \right) \right] - 120\alpha \cdot \gamma_c \cdot (1+t) \cdot d \cdot L^2 - 1.6 \cdot M_{LL} \geq 0$$

$$\frac{1400}{f_y} \leq \frac{A_s}{d} \leq 75\rho_b \quad (7-a)$$

Las inecuaciones (13-a) y (7-a) corresponden a las restricciones impuestas sobre una losa maciza unidireccional sometida a flexión, ambas se derivan de las inecuaciones (13) y (7) reemplazando en ambas $b=100$. Ordenando los términos y cuantificando los coeficientes numéricos se obtiene una expresión matemática para minimizar de la forma:

Minimice: $C = b_1 y + b_2 x + b_3 \quad (2-b)$

Sujeto: $a_1 y^2 + a_2 yx + a_3 x + a_4 \geq 0 \quad (13-b)$

$$a_5 \leq \frac{y}{x} \leq a_6$$

$$x, y \geq 0$$

Donde:

$$x = d$$

$$y = A_s$$

Los coeficientes numéricos:

$$a_1 = -\frac{\phi f_y^2}{170 f'_c}$$

$$a_2 = \phi f_y$$

$$a_3 = -120\alpha \gamma_c (1+t) L^2$$

$$a_4 = -1.6 M_{LL}$$

$$a_5 = \frac{1400}{f_y}$$

$$a_6 = 75\rho_b$$

$$b_1 = C_s \quad b_2 = (100C_c + 2C_e)(1+t) \quad b_3 = 100C_e$$

El problema puede ahora ser resuelto matemáticamente, la solución óptima se obtiene cuando la función objetivo se expresa en función de la variable de diseño principal, en este caso la variable "y" corresponde al área de refuerzo "As" de la losa, mientras que la variable de diseño dependiente representa ser "x" el peralte efectivo de la losa "d". La condición de restricción impuesta al problema se identifica a partir de la relación As/d valor que debe caer dentro de los límites establecidos por ρ_{min} y ρ_{max} , y de este modo se habrá encontrado la solución óptima del problema.

$$x = c_1 y + c_2 \quad (14)$$

$$m y^2 + n y + r = 0 \quad (15)$$

Donde los coeficientes c_1 , c_2 , m , n , r valen respectivamente:

$$c_2 = \frac{b_1 a_3}{b_2 a_2} \quad c_1 = \frac{b_1 a_2 - 2 b_2 a_1}{b_2 a_2}$$

$$m = a_1 + a_2 c_1 \quad n = a_2 c_2 + a_3 c_1 \quad r = a_4 + a_3 c_2$$

Resolviendo la ecuación cuadrática (15) y reemplazando su valor positivo en la ecuación (14) se obtienen los valores óptimos del área de refuerzo y peralte efectivo cumpliendo de esta manera con el diseño integral de costo-resistencia.

Como ejemplo numérico, aplicando este procedimiento a una losa maciza unidireccional simplemente apoyada y de acuerdo con los datos de la tabla N° 1, se obtienen los siguientes resultados:

Tabla 1. Datos para el problema de optimización – Caso I

Propiedades de los Materiales	
Acero estructural	$f_y = 4200 \text{ Kg/cm}^2$
Hormigón Tipo	$f'_c = 210 \text{ Kg/cm}^2$
Peso del H° por unidad de volumen	$\gamma_c = 0.0024 \text{ Kg/cm}^3$
Propiedades de la sección rectangular	
Base de la viga	$b = 100 \text{ cm}$
Relación de recubrimiento $t = r/d$:	$t = 0.10$
Características de la viga	
Longitud de cálculo	$L = 300 \text{ cm}$
Carga Viva uniformemente distribuida	$q_{LL} = 7.5 \text{ Kg/cm}$
Coefficiente por condición de apoyo	$\alpha = 0.125$
Momento máximo por carga viva (LL)	$M_{LL} = 84375 \text{ Kg.cm}$
Coefficiente de diseño a flexión:.	$\phi = 0.90$
Parámetros de la función costo	
Costo del acero estructural	$C_s = 0.014662 \text{ \$us/cm}^3$
Costo del hormigón	$C_c = 0.000105 \text{ \$us/cm}^3$
Costo del encofrado	$C_e = 0.000665 \text{ \$us/cm}^2$
Restricciones de diseño o de optimización	
Cuantía geométrica mínima	$14/f_y = 0.0033$
Cuantía geométrica máxima	$0.75 \rho b = 0.0159$

Los cálculos previos se resumen en las siguientes tablas:

Precios Unitarios: Se asumen los precios unitarios del mercado de la construcción, probablemente con ligeras variaciones, aunque esto no representa un óbice para el efecto demostrativo que se

le quiere dar al presente trabajo. Estos precios podrían también incluir costo de mano de obra, equipos y hasta impuesto, sin embargo, estos costos prácticamente son fijos y por lo tanto no influyen de manera determinante en la función costo (Borda FJ.).

Tabla 2. Precios de los ítems componentes del H°A° para la función costo

Precios Unitarios de los ítems componentes del hormigón armado			
Acero	13.00 Bs/Kg	=	0.102050 Bs/cm ³ = 0.014662 \$us/cm ³
Hormigón	727.80 Bs/m ³	=	0.000728 Bs/cm ³ = 0.000105 \$us/cm ³
Encofrado	4.30 Bs/pie ²	=	0.004628 Bs/cm ² = 0.000665 \$us/cm ²

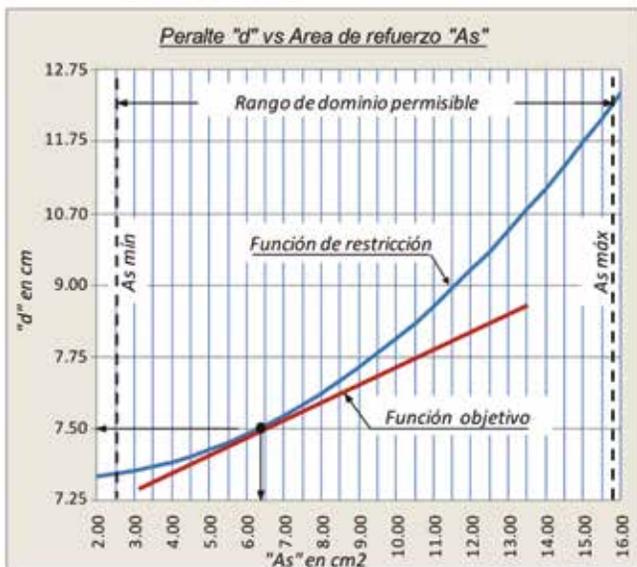
Coefficientes numéricos: De acuerdo con los datos del problema planteado y los cálculos previos se obtienen los coeficientes numéricos que se utilizarán en el proceso de optimización y diseño integral, costo-resistencia.

Tabla 3. Coeficientes numéricos – Caso I

a1	a2	a3	a4
-444.7	3780.0	-3564.0	-135000.0
b1	b2	b3	
0.01466	0.0129657	0.06650	
c1	c2		
1.366124	-1.066211		
m	n	r	
4719.24	-8899.14	-131200.02	

Finalmente el problema está representado en el gráfico N° 1, en él se observa la zona de diseño permisible, limitada por las restricciones geométricas y de resistencia a flexión. La solución óptima se encuentra a partir de que la función costo se convierte en tangente a la función de restricción dentro del rango de dominio permisible.

Figura 3. representación del proceso de optimización de una losa maciza unidireccional



Este punto se identifica como el punto de solución óptima, y es el punto donde la pendiente de

la recta iguala a la pendiente de la función de restricción, verificando que el valor de As se encuentra dentro de los límites establecidos por Asmin y Asmax, se concluye indicando haber encontrado la solución óptima del problema. Matemáticamente se llega a los mismos resultados resolviendo las ecuaciones (14) y (15), los mismos que son coincidentes con los del gráfico N° 1.

A objeto de comparar resultados se ha resuelto la misma losa maciza unidireccional mediante el procedimiento prueba y error, recomendado por el Código del ACI 318-08, los resultados se presentan en tabla N° 4.

Tabla 4. Cuadro Comparativo de resultados finales

Diseño mediante	As [cm ²]	d [cm]	ρ
Ecuaciones (14) y (15) del proceso de optimización	6.2992	7.5392	0.00840
Gráfico N° 1 del proceso de optimización	6.35	7.50	0.00847
Procedimiento manual según ACI 318 - 2008	7.35	6.76	0.01087

Los valores de "As" y "d" encontrados anteriormente son reemplazados en la ecuación (2-b) y se consigue el costo mínimo de la sección: **C = 25.57 \$us/m** o lo que es lo mismo para la losa unidireccional de ancho b = 1 m y altura h = 1.10 * d = 1.10*7.54 = 8.29 cm ; **C = 308.44 \$us/m³ = 2146.77 Bs/m³**

Caso II.- Viga rectangular simplemente reforzada VSR II de ancho "b" desconocido.-

Se establecen como variables de diseño el área de refuerzo "As", el ancho de la sección rectangular "b" y el peralte efectivo "d" de la viga; entre las mismas se establecen las siguientes relaciones:

$$\beta = \frac{b}{d} ; \rho = \frac{A_s}{bd}$$

De esta manera se plantean las siguientes restricciones:

$$0.35 \leq \beta \leq 1 \quad (16)$$

$$\rho_{\min} \leq \rho \leq \rho_{\max} \quad (17)$$

$$A_s, b, d > 0$$

$$\phi M_n - M_u \geq 0 \quad (18)$$

$$\left(1 - \frac{\rho f_y}{1.70 \cdot f_c}\right) \phi \cdot \rho \cdot \beta \cdot f_y \cdot d^3 - 1.20 \alpha \cdot \beta \cdot \gamma_c \cdot L^2 (1+t) d^2 - 1.60 M_{LL} \geq 0$$

Haciendo:

$$a_1 = \left(1 - \frac{\rho f_y}{1.70 \cdot f_c}\right) \phi \cdot \rho \cdot \beta \cdot f_y ; a_2 = -1.20 \alpha \cdot \beta \cdot \gamma_c \cdot L^2 (1+t);$$

$$a_3 = -1.60 M_{LL}$$

La restricción de resistencia se puede expresar de la siguiente manera:

$$f_{(d)} = a_1 \cdot d^3 + a_2 \cdot d^2 + a_3 \geq 0 \quad (18 - a)$$

La función costo se expresa en términos de las variables de diseño como:

$$C_{(d)} = [C_s \rho \beta + C_c \beta (1+t)] d^2 + C_e 2(1+t) d + C_e \beta \quad (19)$$

Haciendo:

$$b_1 = [C_s \rho \beta + C_c \beta (1+t)] ; \quad b_2 = C_e 2(1+t) ; \quad b_3 = C_e \beta$$

Entonces el problema de optimización tiene la siguiente estructura matemática:

$$\text{Minimice:} \quad C_{(d)} = b_1 d^2 + b_2 d + b_3 \quad (19 - a)$$

Sujeto:

$$f_{(d)} = a_1 \cdot d^3 + a_2 \cdot d^2 + a_3 \geq 0 \quad (18 - a)$$

$$0.35 \leq \beta \leq 1 \quad (16)$$

$$\rho_{\min} \leq \rho \leq \rho_{\max} \quad (17)$$

$$A_s, b, d > 0$$

Se observa que el problema de optimización planteado, involucra una sola variable de diseño independiente "d". Basándonos en esta observación las otras variables de diseño pueden obtenerse usando las relaciones (16) y (17) dentro de los rangos correspondientes. Ahora bien llevando la restricción (18-a) al límite ($f_{(d)} = 0$) se observa que el punto de intersección entre la función costo y la función de restricción representa el punto de tangencia común por lo tanto representa el valor óptimo de la variable de diseño independiente "d". Entonces, igualando (18-a) y (19-a) se obtiene:

$$g_{(d)} = a_1 d^3 + (a_2 - b_1) d^2 - b_2 d + (a_3 - b_3) = 0 \quad (20)$$

Esta es una ecuación de tercer grado, que puede ser resuelta mediante métodos numéricos, en nuestro caso recurrimos al método de Newton-Raphson, con una aproximación al resultado no mayor 0.001, es decir: $\xi < 0.001$. Las otras variables de diseño se moverán dentro del rango de su dominio permisible.

Aplicando este procedimiento a un ejemplo concreto, en la tabla N° 5 se resumen los datos iniciales del problema.

Tabla 5. Datos para el problema de optimización – Caso II

Propiedades de los Materiales	
Acero estructural	$f_y = 4200 \text{ Kg/cm}^2$
Hormigón Tipo	$f_c = 210 \text{ Kg/cm}^2$
Peso del H° por unidad de volumen:	$\gamma_c = 0.0024 \text{ Kg/cm}^3$
Propiedades de la sección rectangular	
Relación base/peralte $\beta = b/d:$	$\beta = 0.67$
Relación de recubrimiento $t = r/d:$	$t = 0.10$
Características de la viga	
Longitud de cálculo	$L = 500 \text{ cm}$
Carga viva uniformemente distribuida	$q_{LL} = 7.50 \text{ Kg/cm}$
Coefficiente por condición de apoyo	$\alpha = 0.125$
Momento máximo por carga viva (LL)	$M_{LL} = 234375 \text{ Kg.cm}$
Coefficiente de diseño a flexión	$\phi = 0.90$
Parámetros de la función costo	
Costo del acero estructural	$C_s = 0.014662 \text{ \$us/cm}^3$
Costo del hormigón	$C_c = 0.000105 \text{ \$us/cm}^3$
Costo del encofrado	$C_e = 0.000665 \text{ \$us/cm}^2$
Restricciones de diseño o de optimización	
Cuantía geométrica mínima	$14/f_y = 0.0033$
Cuantía geométrica promedio (inicial)	$\rho = 0.0078$
Cuantía geométrica máxima	$0.75 \rho b = 0.0159$

Coefficientes numéricos: De acuerdo con los datos del problema planteado y los cálculos previos se obtienen los coeficientes numéricos para resolver el proceso de optimización y diseño integral, costo-resistencia.

Resolviendo la ecuación (20) de tercer grado, los valores numéricos se muestran en la tabla N° 7.

Tabla 6. Coeficientes numéricos – Caso II

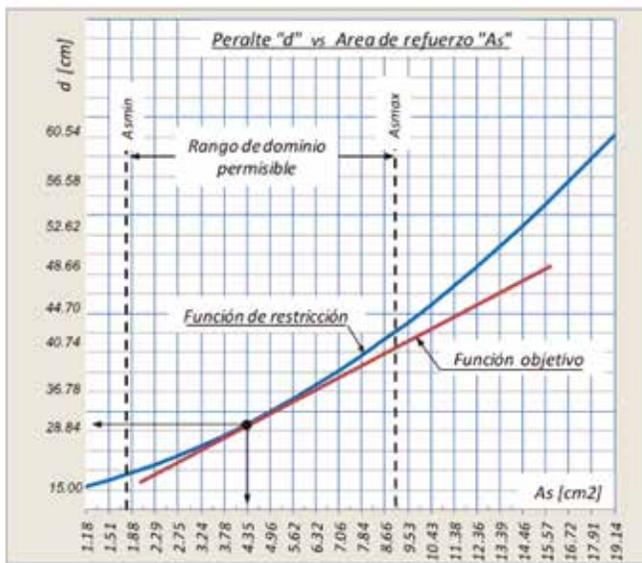
a1	a2	a3
17.9415	-66.3300	-375000.0
b1	b2	
0.000154	0.001909	

Tabla 7. Resultados de la ecuación (20) mediante Newton-Raphson

dn	g(d)	q'(d)	dn+1	Δd	b	As	Costo/cm
15.00	-329371.63	10120.63	47.545	32.545	10.050	1.176	0.0633
16.98	-306288.35	13266.16	40.068	23.088	11.377	1.507	0.0768
18.96	-276559.11	16833.71	35.389	16.429	12.703	1.879	0.0915
20.94	-239348.31	20823.30	32.434	11.494	14.030	2.292	0.1075
22.92	-193820.32	25234.91	30.601	7.681	15.356	2.745	0.1246
24.90	-139139.53	30068.55	29.527	4.627	16.683	3.240	0.1430
26.88	-74470.33	35324.22	28.988	2.108	18.010	3.776	0.1626
28.84	-1.22	40927.59	28.835	0.000	19.319	4.345	0.1831
30.82	86999.23	47021.99	28.965	-1.850	20.646	4.962	0.2051
32.80	186484.39	53538.41	29.312	-3.483	21.973	5.621	0.2282
34.78	299289.88	60476.86	29.826	-4.949	23.299	6.320	0.2526
36.76	426251.31	67837.34	30.472	-6.283	24.626	7.060	0.2782
38.74	568204.29	75619.85	31.221	-7.514	25.952	7.841	0.3050
40.72	725984.44	83824.38	32.054	-8.661	27.279	8.663	0.3330
42.70	900427.38	92450.94	32.955	-9.740	28.606	9.526	0.3622
44.68	1092368.72	101499.54	33.913	-10.762	29.932	10.430	0.3926
46.66	1302644.08	110970.15	34.916	-11.739	31.259	11.375	0.4243
48.64	1532089.07	120862.80	35.959	-12.676	32.585	12.361	0.4571
50.62	1781539.31	131177.47	37.034	-13.581	33.912	13.388	0.4912
52.60	2051830.41	141914.18	38.137	-14.458	35.239	14.456	0.5264
54.58	2343797.99	153072.91	39.263	-15.312	36.565	15.565	0.5629
56.56	2658277.66	164653.67	40.410	-16.145	37.892	16.715	0.6005
58.54	2996105.04	176656.45	41.575	-16.960	39.218	17.906	0.6394
60.52	3358115.75	189081.27	42.755	-17.760	40.545	19.138	0.6795

El problema es representado en el gráfico N° 2, la solución óptima se encuentra en el punto de tangencia entre la función objetivo y la función de restricción por resistencia, el mismo que se encuentra dentro del rango de dominio permisible.

Figura 4. Representación del proceso de optimización de una viga simplemente reforzada



Habiendo encontrado la solución óptima, es decir:
 $d = 28.84 \text{ cm}$, $A_s = 4.35 \text{ cm}^2$
 $b = 19.32 \text{ cm}$
 Se verifican las restricciones geométricas impuestas:

$$0.35 \leq \frac{b}{d} \leq 1$$

$$0.35 \leq 0.677 \leq 1$$

$$\rho_{\min} \leq \frac{A_s}{bd} \leq \rho_{\max}$$

$$0.0033 \leq 0.0078 \leq 0.0159$$

Se concluye indicando haber encontrado la solución óptima del problema.

Estos resultados son comparados con los encontrados mediante el procedimiento de diseño prueba y error, recomendado por el Código del ACI 318-08, los resultados se presentan en la tabla N° 8.

Tabla 8. Resumen comparativo de resultados finales

Diseño mediante	A_s [cm ²]	d [cm]	d [cm]
Newton-Raphson ecuación (20) proceso de optimización	4.35	28.84	19.32
Procedimiento manual según ACI 318 - 2008	4.56	28.65	20.00

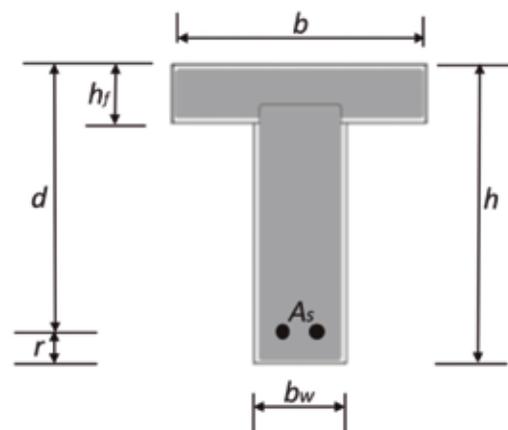
Resultados que verifican la validez del procedimiento de diseño integral costo-resistencia. El valor del costo óptimo, resulta ser:

$$C = 18.31 \text{ \$us/m}; C = 328.62 \text{ \$us/m}^3 = 2287.15 \text{ Bs/m}^3$$

Caso III.- Viga T simplemente reforzada VTSR .-

En este tipo de vigas, las alas proporcionan un gran refuerzo a compresión, por lo que este tipo de secciones generalmente son simplemente reforzadas. En el análisis de estas vigas, se debe tomar en cuenta la profundidad "a" del bloque de compresión, puede darse que este sea menor al espesor del ala "hf" o que sea mayor, en este caso la viga tiene un comportamiento como viga T, caso contrario se comporta como viga rectangular de ancho "b".

Figura 5. Sección transversal Viga T



El problema de optimización para el costo mínimo se plantea de la siguiente manera:

Minimice: $C = b_1 A_s^2 + b_2 d + b_3$ (21)

Sujeto: $a_1 A_s + a_2 A_s d - a_3 - a_4 d \geq 0$ (22)

$$\rho_{\min} \leq \rho \leq \rho_{\max}$$

$$h_f \leq a \leq \frac{d}{2}$$
 (23)

$$A_s, d, a > 0$$
 (24)

Los coeficientes numéricos de las funciones costo y de restricción están definidos como siguen:

$$a_1 = \left[\frac{\phi f_y C}{2} (a - h_f) - \frac{\phi f_y}{2} a \right]; a_2 = \phi f_y$$

$$a_3 = 1.2\alpha \cdot \gamma_c L^2 (b - b_w) h_f + 1.6M_{LL}; a_4 = 1.2\alpha \cdot \gamma_c L^2 b_w (1 + t)$$

$$b_1 = C_s; b_2 = (C_c b_w + 2C_c)(1 + t)$$

$$b_3 = C_c (b - b_w) h_f + C_c [2(b - h_f) - b_w]$$

$$C = \frac{(b - b_w) h_f}{(b - b_w) h_f + ab_w}$$
 (25)

$$a = \frac{A_s f_y}{0.85 f_c b_w} - h_f \left(\frac{b_w}{b} - 1 \right)$$
 (26)

Donde, "C" representa la fuerza resultante de compresión generada por las fuerzas internas en el bloque de compresión del hormigón y "a" es la profundidad del mismo bloque, todos los demás términos han sido definidos anteriormente.

La solución óptima se obtiene igualando las pendientes de las ecuaciones (21) y (22), luego de algunas simplificaciones matemáticas se encuentra la ecuación (27), que permite calcular el área de refuerzo "A_s":

$$mA_s^2 + nA_s + r = 0 \quad (27)$$

Donde los coeficientes m, n, r valen respectivamente:

$$m = \frac{b_1 a_2}{b_2}$$

$$n = \frac{2(b_2 a_1 - b_1 a_4)}{b_2}$$

$$r = \frac{b_1 a_4^2 + b_2 a_1 a_4 - b_2 a_2 a_3}{b_2 a_2}$$

Y el peralte efectivo "d" de la viga:

$$d = c_1 A_s - c_2 \quad (28)$$

$$c_1 = \frac{b_1}{b_2} ; c_2 = \frac{b_1 a_4 + b_2 a_1}{b_2 a_2}$$

Seguidamente se verifica la profundidad "a" del bloque de compresión mediante la ecuación (26) que se compara con el espesor del ala "hf", si este es mayor la viga se comporta como viga T y se procede, mediante un proceso rápido de convergencia, a un ajuste del valor de "a", en estas condiciones se habrá encontrado la solución óptima de "A_s" y "d". Si la profundidad del bloque de compresión es menor que el espesor del ala, la viga se comporta como viga rectangular de ancho igual a "b" y se procede como en los casos anteriores (Caso II)

Un ejemplo numérico aplicando este procedimiento para una viga simplemente apoyada de sección T y de acuerdo con los datos de la tabla N° 9 arroja los siguientes resultados:

Tabla 9. Datos para el problema de optimización – Caso III

Propiedades de los Materiales	
Acero estructural	f _y = 4200 Kg/cm ²
Hormigón Tipo	f'c = 210 Kg/cm ²
Peso del H° por unidad de volumen	γ _c = 0.0024 Kg/cm ³
Propiedades de la sección rectangular	
Espesor del ala	hf = 6.00 cm
Base de la viga	b _w = 15.00 cm
Ancho del ala de la viga T	b = 35.00 cm
Relación de recubrimiento t = r/d	t = 0.10
Coefficiente de diseño a flexión	φ = 0.90
Características de la viga	
Longitud de cálculo	L = 450 cm
Carga viva uniformemente distribuida	q = 7.50 Kg/cm
Coefficiente por condición de apoyo	α = 0.125
Momento máximo por carga viva (LL)	M _u = 303750 Kg.cm
Parámetros de la función costo	
Costo del acero estructural	C _s = 0.014662 \$us/cm ³
Costo del hormigón	C _c = 0.000105 \$us/cm ³
Costo del encofrado	C _e = 0.000665 \$us/cm ²
Restricciones de diseño o de optimización	
Cuantía geométrica mínima	14/f _y = 0.0033
Cuantía geométrica máxima	0.75 ^ρ b = 0.0159
Límites del bloque de compresión	hf < a < d/2

Coefficientes numéricos: Se calcularon los coeficientes numéricos los mismos que se muestran en la tabla N° 10.

Tabla 10. Coeficientes numéricos – Caso III

a1	a2	a3	a4
-12195.47	3780.00	312498.00	1202.85
b1	b2	b3	
0.01466	0.0031955	0.04120	
m	n	r	
17343.88	-35429.08	-314622.53	
c1	c2		
4.5883	-1.7662		

Los resultados finales se encuentran luego de resolver las ecuaciones (25) y (26)

$$A_s = 5.41\text{cm}^2 \quad d = 26.60\text{cm}$$

Finalmente se verifica el cumplimiento de las restricciones impuestas en el planteamiento inicial del problema, tal como se observa en la tabla N° 11. En consecuencia se puede asegurar que se ha alcanzado la solución óptima que minimiza la función costo.

Tabla 11. Verificación de las condiciones de restricción

ρ_{min}	<	ρ	<	ρ_{max}
0.0033	<	0.0097	<	0.0159
hf	<	a	<	$d/2$
6.000	<	7.06	<	13.301

Cuantía geométrica y profundidad del bloque de compresión

El costo mínimo: $C = 20.52 \text{ \$us/m}$;
 $C = 367.70 \text{ \$us/m}^3 = 2559.21 \text{ Bs/m}^3$

DISCUSION

El procedimiento de optimización aplicado al diseño estructural de vigas sometidas a flexión, resulta ser una alternativa a la metodología tradicional. Está basado fundamentalmente en una formulación precisa de una función objetivo en la que intervienen simultáneamente todas las variables de diseño y que son controladas por sus respectivas restricciones, las mismas que pueden ser impuestas por las normas y códigos de diseño establecido.

La mayoría de los procedimientos o métodos de optimización que se presentan en la amplia literatura teórica de optimización, así como la complejidad de las funciones no lineales que se plantean para la resolución de problemas estructurales y por su lento y difícil proceso de

convergencia no los hacen atractivos para una aplicación práctica en el campo del diseño estructural; a no ser que estos vengan implementados en programas informatizados especializados y de los cuales el ingeniero usuario desconoce el complejo proceso que se desarrolla para su implementación.

Queda demostrado que el procedimiento de diseño estructural a través de la integración simultánea de la función costo o función objetivo, con las variables de diseño ingenieril se puede llevar adelante mediante la utilización de técnicas o métodos de optimización bastante simples como es el de formulación matemática de una función a una sola variable aplicando la teoría de máximos y mínimos sin mayor complicación.

Dentro del rango del dominio permisible de las variables de diseño, los resultados alcanzados son válidos, no negativos y únicos, por lo tanto garantizan el diseño integral a través del costo mínimo y de la resistencia a la flexión en vigas sometidas a este tipo de comportamiento.

Con la ayuda de planillas electrónicas como "Excel" rápidamente se permite implementar un proceso de diseño óptimo integral sin más complicaciones que la de formular los coeficientes numéricos del problema de una manera sistemática y ordenada de modo que se resuelve el problema sin mayores costos de tiempo adicionales para el diseñador.

Finalmente, este procedimiento ha sido planteado para el caso de vigas sometidas a flexión, sin embargo para futuras investigaciones este procedimiento puede ser extendido a problemas de diseño, tales como columnas, vigas sometidas a cortante, problemas con control de deflexión, etc.

BIBLIOGRAFÍA

- Álvarez G. E. (1996) Optimum Design of Plane Frames in Reinforced Concrete - M.sc. Thesis – University of Toledo – Ohio – USA.
- American Concrete Institute (2008) Building Code Requirements for Reinforced Concrete. ACI 318-08 Detroit - USA
- Borda F. J. – Rodríguez G. (2010) Optimización de Secciones Transversales de Pórticos de Hormigón Armado Mediante Uso de la Técnica de Programación Cuadrática Secuencial SPQ – Asociación Argentina de Mecánica

- computacional – Mecánica Computacional Vol. XXIX – Buenos Aires – Argentina.
- Coello C. C. - Santos H. - Alonso F. (1996) Diseño Óptimo de Vigas de Concreto Reforzado Mediante Algoritmos Genéticos – Escuela de Ingeniería Civil – Universidad Autónoma de Chiapas – México.
 - Eschenauer H. - Olhoff N. - Schnell W. (1997) Applied Structural Mechanics – Fundamentals of Elasticity, Load Bearing Structures and Structural Optimization – Springer – Berlin – Alemania.
 - Eyorokon T. V. (1986) Structural Design by Optimization Techniques – M.sc. Thesis – University of Toledo – Ohio – USA.
 - Hernandez S. (1993) Advanced Techniques in the Optimum Design of Structures – Computational Mechanics – School of Civil Engineering – University of La Coruña – España.
 - Krishnamoorthy C. S. (1996) Nonlinear Analysis and Optimal Design of Concrete Framed Structures – Indian Institute of Technology – India.
 - Martí P. - Martínez P. - Torrano S. (2000) Aplicación de las Técnicas de Optimización en el Proceso de Diseño de Estructuras – Dpto. de Estructuras y Construcción – Universidad de Murcia – España.
 - Morales M. R. (2000) Diseño en Concreto Armado – I Congreso Nacional de Estructuras y Construcción – Capítulo ACI – Lima - Perú.
 - Pike Ralph W. (1996) Optimization for Engineering Systems – Van Nostrand Reinhold Company – New York – USA.