ANÁLISIS DE LA INTERACCIÓN SUELO-ESTRUCTURA DE FUNDACIÓN, MEDIANTE EL MÉTODO DE LAS DIFERENCIAS FINITAS

ANALYSIS OF THE INTERACTION SOIL-STRUCTURE OF FOUNDATION, USING THE METHOD OF FINITE DIFFERENCES

Ojeda Martínez Leidy Laura [1]

[1] Ingeniera Civil Investigadora Junior Departamento de Estructuras – Carrera de Ing. Civil - Facultad de Ciencias y Tecnología – Universidad Autonoma "Juan Misael Saracho"

Correo electrónico: leidy_ojedam@hotmail.com

RESUMEN

Las estructuras descansan sobre sus fundaciones, y estas se encargan de transmitir las cargas al suelo; estas fundaciones sufren deformaciones provocando esfuerzos que influyen en las estructuras de cimentación y sus elementos estructurales, por lo que debe conocerse con mayor precisión los esfuerzos, así como los asentamientos que intervienen en toda la estructura.

La presente investigación trata de aplicar el método de las diferencias finitas al análisis de fundaciones consideradas como elementos superficiales, tomando en cuenta la interacción suelo-estructura y utilizando el modelo Winkler. A través de ello se pretende desarrollar un modelo particular del comportamiento de la fundación para luego desarrollar ecuaciones generales y algoritmos que nos ayudaran a la elaboración de un programa computarizado.

En comparación con otros métodos de análisis, utilizados para resolver el problema de contacto, el método de las diferencias finitas resulta ser un método confiable y bastante accesible para su programación computarizada, de manera que es posible conocer con mejor precisión el comportamiento de este tipo de estructuras de cimentación.

Palabras Clave: Interacción suelo-estructura, fundación, diferencias finitas.

ABSTRACT

Structures rest on their foundations, and these are responsible for transmitting the loads to the ground. These foundations suffer deformations leading efforts that influence the structure foundations and their structural elements, so it must be known accurately efforts as the well as the settlements involved in the entire structure.

This research tries to apply the method of finite difference to analysis of foundations considered superficial elements, taking into account the soil-structure interaction and using the Winkler model. It seeks to develop a particular model of the behavior of the foundation to develop general equations and algorithms that we help the development of a computerized programming.

Compared to other methods of analysis used to solve the problem of contact, the finite difference method turns out to be a reliable and accessible for the computer programming and to know with greater accuracy the behavior of this type of foundation structures.
Keywords: Interaction soil-structure, foundation, finite differences.

Introducción

Las estructuras como edificaciones, puentes, tanques, etc., se apoyan en sus fundaciones, y estas se encargan de transmitirlas al suelo, la cimentación recibe de la superestructura los esfuerzos y del suelo una tensión de condición admisible para estas acciones recibidas de la superestructura, éstas etapas son estancas (Freire Tellado, 2001).

El análisis de estructuras se basa en la compatibilidad de los desplazamientos que existen entre cada uno de los elementos de las estructuras, pero llegando a la cimentación este antecedente queda a un lado, ya que su tratamiento de las partes es totalmente independiente, lo que ocasiona obviar las deformaciones de la cimentación como el efecto de compresibilidad del suelo, y por tanto

de los asentamientos de las edificaciones (Freire Tellado, 2001).

Santos Miñon (1980), menciona que la primera dificultad que aparece al querer encontrar una solución es encontrar las reacciones del terreno que aparecen en el plano de unión entre la cimentación y el suelo. Estos problemas de contorno se reducen en tensiones y deformaciones, lo que se le suele llamar problema mixto.

En nuestro medio los elementos de cimentación son calculados por procedimientos simplificados en su mayoría, como dicen Gorbunov- Posadov(1947) y G. Sherif(1975), los mismos se comportan de manera satisfactoria, sin embargo es necesario añadir una mejor adecuación a los elementos que se proyectan en los esfuerzos que realmente van a afectarlos, lo que repercute en una cierta economía del proyecto, que no hace que disminuya la seguridad obtenida, sino al contrario se aumenta al reforzar aquella zona que va tener mayores esfuerzos.

Es por eso que al tomar en cuenta la interacción suelo-estructura, se quiere dar una idealización de la estructura, acercándose a la realidad lo más que se pueda, ya que es muy importante hacer un análisis tomando en cuenta todos los factores que intervienen en el problema de contacto, sobre todo cuando la misma se apoya en suelos blandos, que son más susceptibles a ocasionar asentamientos en las estructuras.

El problema de contacto

Santos Miñon (1980) describe: "El problema de contacto estudia el caso cuando en el contorno de un cuerpo existe numerosas regiones Ω , en cada una de las cuales se dan las siguientes condiciones de contacto.

- Igualdad de deformaciones entre dos cuerpos en la zona de contacto.
- La presión de contacto que se produce entre dos cuerpos, o reacción de uno sobre el otro, ha de ser tal que la deformación inducida por estas tensiones cumpla la primera condición o condición de deformación."

Para la interacción del suelo y la estructura, se utiliza varios modelos de suelos, es decir suelos ideales concretados por la expresión matemática de la relación carga -asiento, en cuya base se encuentra el problema de contacto debido a la complejidad del comportamiento del suelo real (Santos Miñon, 1980). Uno de los modelos es el modelo de Winkler, que representa al suelo como un sistema de resortes lineales, bajo la suposición de que las presiones de contacto son proporcionales a las deformaciones. El modelo presenta la ventaja adicional de ser utilizado para condiciones de cargas tanto verticales como horizontales (Winkler, 1867).

$$q = k_s . w$$

Donde:

q: es la presión transmitida $[F/L^2]$;
k_s: es el coeficiente de reacción del suelo $[F/L^3]$
w: son los asentamientos producidos en el suelo $[L]$.

Es importante anotar que en esta ecuación se está suponiendo una cimentación rígida que transmite al suelo una presión q, y que el suelo se deforma una cantidad w, tal como lo haría en un líquido. Producto de esta definición y para que la expresión sea dimensionalmente correcta, *ks* tendrá unidades de fuerza por volumen, razón por la cual se le suele llamar método del fluido denso. (Otálvaro y Nanclares, 2009).

La cuantificación del módulo de Balasto o coeficiente de reacción del suelo, según Delgado Vargas, surge del análisis de la interacción suelo estructura en una viga de fundación, como la relación de presiones de contacto suelo-cimiento y las deflexiones correspondientes del elemento que resultan iguales a los asentamientos del suelo. El ensayo de carga, consiste en determinar los asentamientos generados bajo las presiones del cimiento que van aumentando al aumentar las cargas. El coeficiente de Balasto permite caracterizar los resultados del ensayo, como la relación de la presión media de fundación y el asentamiento correspondiente siendo la pendiente de tangentes o secantes a la curva obtenida de los resultados de asentamientos versus las presiones correspondientes. Este coeficiente tiene una ventaja de simplicidad conceptual, siendo su uso delicado ya que depende de numerosos factores, tanto del suelo y como del elemento de fundación. También se debe tomar en cuenta los sucesos pertinentes de la interacción suelo-estructura.

Para esta solución del problema de contacto se utilizan diferentes **métodos matemáticos** de cálculo, dentro de los cuales se encuentran los métodos numéricos, que se basan en la solución del problema mixto de contorno que plantea la solución de la ecuación diferencial. Uno de los métodos que se puede distinguir es el **método de las diferencias finitas**, que es empleada de forma directa (Santos Miñon, 1980).

El método de las diferencias finitas es considerado un método sencillo, en la solución de elementos superficiales, permitiendo plantear soluciones matriciales ya que básicamente consiste en el reemplazo de las ecuaciones diferenciales parciales, por sus correspondientes ecuaciones de diferencias finitas, para luego obtener un conjunto de ecuaciones algebraicas simultaneas que son más sencillas de resolver (Ballinas-Mijangos, 2006).

Materiales y Métodos:

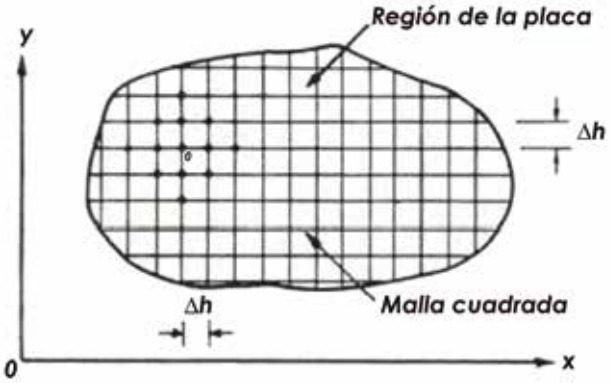
Aplicación de las diferencias finitas aplicado a elementos superficiales
El problema de losas se resuelve haciendo uso de la teoría de las placas. La ecuación diferencial de flexión en placas delgadas apoyadas sobre un medio Winkleriano (Timoshenko, 1959).

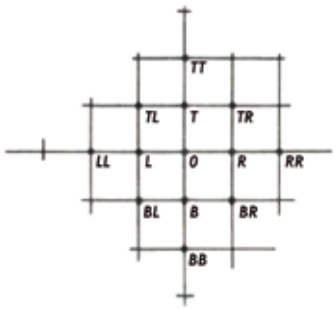
$$\frac{d^4w}{dx^4}+\frac{2d^4w}{dx^2\,dy^2}+\frac{d^4w}{dy^4}=\frac{q}{D}+\frac{P}{D(dxdy)}$$

Para solucionar el problema asumimos que el elemento se encuentra dividido en mallas de diferencias finitas, donde las mallas tendrán un espaciamiento Δh entre nodos a lo largo de ambas direcciones de coordenadas.

Estas mallas deben poseer las suficientes divisiones como para que todas las cargas se concentren sobre los nodos, y si alguna se encuentra fuera de ellos, puede ser repartida en los nodos adyacentes (aunque no se recomienda).

Figura 1 Malla de diferencias finitas en una losa y designación de puntos.





Detalle en el nodo "0"

De lo anteriormente establecido, podemos obtener las siguientes relaciones de diferencias finitas:

$$\left[\frac{dw}{dx}\right]_0=\frac{1}{2\Delta h}[w_R-w_L]$$

$$\left[\frac{dw}{dy}\right]_0=\frac{1}{2\Delta h}[w_T-w_B]$$

$$\left[\frac{d^2w}{dx^2}\right]_0=\frac{1}{\Delta h^2}=[w_R-2w_{0+}w_L]$$

$$\left[\frac{d^2w}{dy^2}\right]_0=\frac{1}{\Delta h^2}[w_T+w_B-2w_0]$$

$$\left[\frac{d^2w}{dxdy}\right]_0=\frac{1}{4\Delta h^2}[w_{TR}-w_{TL}+w_{BL}-w_{BR}]$$

$$\left[\frac{d^3w}{dx^3}\right]_0=\frac{1}{2\Delta h^3}[w_{RR}-2w_R+2w_L-w_{LL}]$$

$$\left[\frac{d^3w}{dy^3}\right]_0=\frac{1}{2\Delta h^3}[w_{TT}-2w_T+2w_B-w_{BB}]$$

$$\left[\frac{d^4w}{dx^4}\right]_0=\frac{1}{2\Delta h^4}[w_{RR}-4w_R+6w_L-4w_L+w_{LL}]$$

$$\left[\frac{d^4w}{dy^4}\right]_0=\frac{1}{\Delta h^4}[w_{TT}-4w_T+6w_0-4w_B+w_{BB}]$$

$$\left[\frac{d^4w}{dx^2dy^2}\right]_0=\frac{1}{\Delta h^4}[w_{TR}+w_{TL}+w_{BL}+w_{BR}+4w_0-2(w_R+w_T+w_L+w_B)$$

Cabe destacar que existe un cierto error en los datos obtenidos de esta manera, el cual tiende a desvanecerse conforme Δ*h* se haga más pequeña en relación con *h*. Por tanto, substituyendo los términos correspondientes a la ecuación diferencial de flexión en placas, obtenemos:

$$20w_0-8(w_R+w_T+w_L+w_B)+2(w_{TR}+w_{TL}+w_{BL}+w_{BR})+w_{RR}+w_{TT}+w_{LL}+w_{BB}=\frac{q\Delta h^4}{D}+\frac{P\Delta h^2}{D}$$

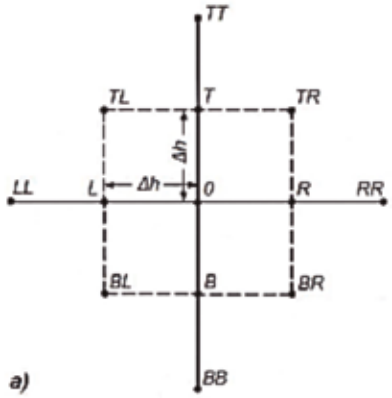
$$D=\frac{Et^3}{12(1-v^2)}$$

Donde:

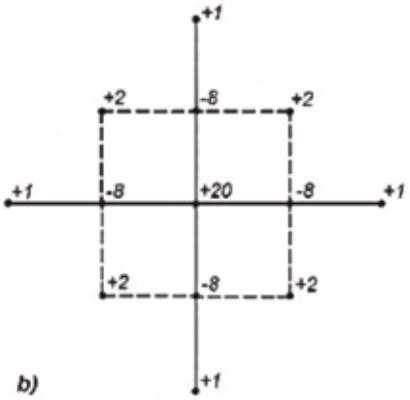
w_i : Deformación de la losa bajo el nodo i.
q : Reacción uniforme del suelo actuante bajo el área tributaria del nodo 0.
Δh : Separación entre nodos.
h : Longitud de la losa.
D : Rigidez a la flexión de la losa.
P : Carga concentrada actuante sobre el nodo 0.
E : Módulo de elasticidad de la losa.
t : Espesor de la losa.
v : Relación de Poisson de la losa.

Esta ecuación, para los nodos centrales de la malla se representa esquemáticamente de la manera siguiente:

Figura 2. Malla para el cálculo de diferencias finitas centrales:
a) Localización de términos



b) Ecuación diferencial aplicable a cualquier nodo interior de la malla.



Para los nodos que se encuentran localizados cerca o sobre los bordes de la malla es necesario aplicar otras ecuaciones.

Tras resolver el conjunto de ecuaciones algebraicas obtenidas mediante la aplicación de las ecuaciones de diferencias finitas correspondientes a cada uno de los nodos de la malla, obtendremos las deflexiones de la losa. Con ellas, los momentos y cortantes actuantes en los nodos interiores de la malla (unidades de momento y cortante por unidad de ancho) pueden ser calculados a partir de las ecuaciones diferenciales siguientes:

$$-\frac{M_x}{D} = \frac{d^2w}{dx^2} + v\frac{d^2w}{dy^2}$$

$$-\frac{M_y}{D} = \frac{d^2w}{dy^2} + v\frac{d^2w}{dx^2}$$

$$-\frac{Q_x}{D} = \frac{d^3w}{dx^3} + v\frac{d^3w}{dxdy^2}$$

$$-\frac{Q_y}{D} = \frac{d^3w}{dy^3} + v\frac{d^3w}{dydx^2}$$

Substituyendo términos, obtenemos:

$$-M_x = \frac{D}{\Delta h^2}(w_L - 2w_0 + w_R) + \frac{vD}{\Delta h^2}(w_T - 2w_0 + w_B)$$

$$-M_y = \frac{D}{\Delta h^2}(w_T - 2w_0 + w_B) + \frac{vD}{\Delta h^2}(w_L - 2w_0 + w_R)$$

$$-Q_x = \frac{D}{2\Delta h^3}(-w_{TL} + w_{TR} - w_{BL} + w_{BR} - w_{LL} + w_{RR} + 4w_L - 4w_R)$$

$$-Q_y = \frac{D}{2\Delta h^3}(w_{TT} - w_{BB} - 4w_T + 4w_B + w_{TL} + w_{TR} - w_{BL} - w_{BR})$$

Los momentos en los extremos del sentido de análisis de la losa son nulos, mientras que los momentos en los extremos perpendiculares al sentido de análisis se determinan mediante el uso de las ecuaciones siguientes:

$$-M_x = \frac{D}{\Delta h^2}(w_L - 2w_0 + w_R)$$

$$-M_y = \frac{D}{\Delta h^2}(w_T - 2w_0 + w_B)$$

Por su parte, los cortantes respecto al eje horizontal en los nodos que se encuentran cerca y sobre el borde de la losa se calculan haciendo uso de otras ecuaciones. Para calcular los cortantes con respecto al eje vertical bastará con girar los diagramas 90° hacia su izquierda.

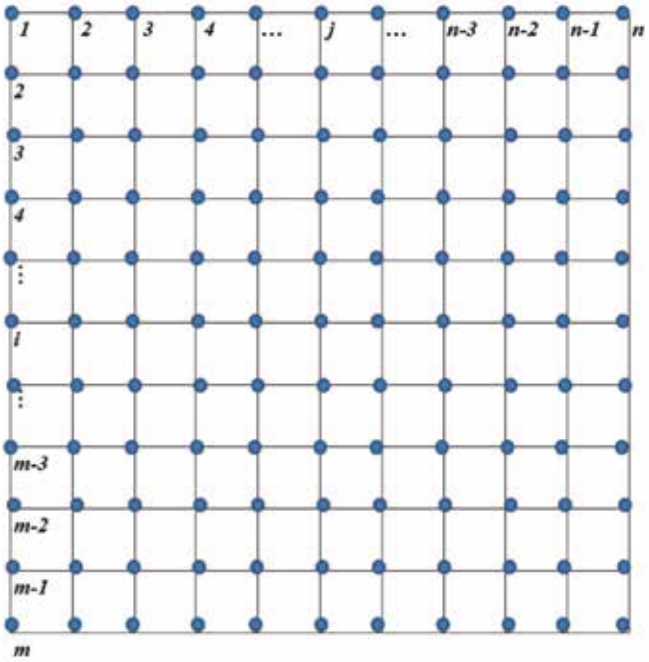
Presentación de algoritmos para la solución por el método de diferencias finitas.-

Suelo modelo Winkler

En primer lugar, se asume que la losa se encuentra dividida en una malla de diferencias finitas. Esta

malla tendrá un espaciamiento Δh entre nodos a lo largo de ambas direcciones de la losa.

Figura 3. División de la losa en mallas de diferencias finita



El número de nodos para cada dirección será igual al número de segmentos (Δh) más 1. Donde la dirección horizontal tendrá un número de nodos que serán denominadas columnas "n" y la dirección vertical tendrá un número de nodos que serán denominadas filas "m". Para obtener la cantidad total de nodos que tiene la malla se realiza la multiplicación de filas por columnas (m x n). La ubicación de cada punto nodal está identificado por los sub índices "*i,j*". Los mismos que indican la fila y columna respectivamente.

Para la presión de contacto que ejerce la placa de fundación al terreno, se hace la suposición que existe un resorte debajo de cada nodo de la malla en representación del suelo bajo la losa (modelo Winkler). Entonces.

$$q(i,j) = -k(i,j) * w(i,j)$$

Donde ***k*** es el coeficiente de Balasto o módulo de reacción del suelo puede ser un valor constante o variante bajo cada nodo de la losa, ***w*** representa las deformaciones de la losa bajo cada punto de la malla.

Para determinar las deformaciones incógnitas se tiene que realizar expresiones para cada nodo de la malla a través de la ecuación diferencial de flexión en placas, que estarán en función de las presiones de contacto y las fuerzas externas actuantes en la losa, por consiguiente, también dependerán de las deformaciones, como también existirán términos independientes que están en función de las fuerzas externas, las mismas que forman un vector {Pij}, que llevados a una expresión matricial, se escriben de la siguiente manera:

$$[C_w]\{w_{ij}\} = \{P_{ij}\}$$

Donde:

$\{w_{ij}\}$: Vector de deformaciones en cada nodo de la malla de la losa

$[C_w]$: Matriz cuadrada (m x n), de coeficientes que están en función de solo los factores que multiplican a las deformaciones, por lo cual se pueden obtener expresiones generales para cualquier tamaño de matriz determinada por la malla de nodos.

$\{P_{ij}\}$: Vector de fuerzas externas, depende del valor de cargas y la ubicación de las mismas.

Para obtener los valores de las deformaciones en cada nodo se despeja el vector de deformaciones $\{w_{ij}\}$, que será igual a la inversa de la matriz $[C_w]$ multiplicada por el vector de fuerzas externas $\{P_{ij}\}$.

$$\{w_{ij}\} = [C_w]^{-1}\{P_{ij}\}$$

Antes de resolver la expresión matricial, para obtener los valores de las deformaciones en cada nodo se plantea y se obtiene, para cada nodo de la malla, un sistema de ecuaciones diferenciales de flexión para placas, las mismas que luego son sustituidas por relaciones de diferencias finitas.

VECTOR DE CARGAS EXTERNAS:

Para el vector de cargas externas se crea vector P_{ij} en el cual se almacenan los valores de las cargas externas.

Los valores que se tienen para este vector son la carga distribuida uniformemente en toda la losa, las cargas puntuales para cada punto nodal y las cargas puntuales en nodos específicos.

La carga distribuida se multiplica por cada área tributaria correspondiente al punto nodal, y se obtienen las cargas concentradas en cada nodo de la malla. Luego se realiza la suma de todas estas cargas concentradas correspondiente a cada nodo de la malla.

Teniendo el P_{ij} total en cada nodo, se forma el vector de cargas externas, este vector es afectado por un valor de Δh^2 y se divide por la rigidez *D* quedando la siguiente expresión: $(\frac{P\Delta h^2}{D})$.

GENERACIÓN DE LOS MOMENTOS FLECTORES EN CADA NODO DE LA LOSA:

- Una vez obtenido el vector de deformaciones $\{w_{ij}\}$, es posible utilizar las ecuaciones respectivas para determinar los momentos flectores en el eje x horizontal y el eje y vertical.
- Para obtener los momentos flectores de los nodos en ambas direcciones se tomará en cuenta desde el nodo (2, 2) hasta ((*m*-1), (*n*-1)), donde m es el número total de filas y n el número total de columnas.
- Para la dirección del eje x en la parte superior se tomarán los nodos de $i=1$ y $1< j < n$, y para la parte inferior $i=m$ y $1< j< n$.
- Para la dirección del eje y en la parte izquierda se tomarán los nodos de $1< i < m$ y $j=1$, para la parte derecha se tomará de $1< i < m$ y $j=n$.
- Para el eje en el sentido de análisis de la losa en los nodos extremos los momentos serán nulos.

GENERACIÓN DE LAS FUERZAS CORTANTES EN LOS NODOS DE LA LOSA:

- Una vez obtenidos el vector de deformaciones $\{w_{ij}\}$ es posible utilizar las ecuaciones respectivas para determinar las fuerzas cortantes en el eje x horizontal y el eje y vertical.
- Para obtener las fuerzas cortantes en ambas direcciones con las ecuaciones anteriores se tomará en cuenta desde el nodo $1< i < m$ y $2< j < n-1$.

GENERACIÓN DE LAS PRESIONES DE CONTACTO Y LAS REACCIONES

Para la generación de las presiones de contacto q_{ij}, se utiliza la siguiente expresión:

$$\boldsymbol{q(i,j)=-k(i,j)*w(i,j)}$$

Donde para cada nodo de la malla, se multiplica el valor obtenido de las deformaciones en cada nodo wij, por el coeficiente de Balasto ks, que se utilizó para realizar los cálculos anteriores.

Una vez obtenidas estas presiones de contacto, podemos encontrar también las reacciones del terreno y la losa pij, para ello multiplicamos la presión de contacto qij de cada nodo por su área tributaria correspondiente a cada nodo. Con estas reacciones podemos verificar el equilibrio del sistema, donde la suma de las reacciones actuantes sobre el terreno y la losa deben ser iguales a la suma de cargas externas actuantes sobre la losa.

$$\Sigma\, p_{ij} \quad = \quad \Sigma P_{ij.}$$

PROCEDIMIENTO PARA EL ANÁLISIS POR DIFERENCIAS FINITAS PARA LOSAS DE FUNDACIÓN EN SUELO MODELO WINKLER.

a) Entrada de datos.
b) Generación de filas y columnas para la malla de diferencias finitas.
c) Entrada y ubicación de cargas en la malla de diferencias finitas en la losa.
d) Generación del vector de cargas externas, términos independientes. $\{P_{ij}\}$
e) Generación de la matriz de coeficientes de deformaciones $[C_w]$
f) Resolver el sistema de ecuaciones para determinar el vector de deformaciones, de la siguiente expresión $\{w_{ij}\}=[C_w]^{-1}\{P_{ij}\}$.
g) Salida de resultado de las deformaciones para cada nodo.
h) Cálculo de las presiones de contacto y reacciones, una vez obtenidas las deformaciones y multiplicadas por el coeficiente de balasto, utilizada anteriormente como constante para toda la losa.
i) Salida de resultados de las presiones de contacto y reacciones en cada nodo.
j) Cálculo de las fuerzas cortantes con las ecuaciones dadas, para cada nodo de la malla de la losa.
k) Salida de resultados de las fuerzas cortantes en ambas direcciones para cada nodo.
l) Cálculo de los momentos flectores en ambas direcciones de la losa, con las ecuaciones dadas para cada nodo de la losa.
m) Salida de resultados de los momentos flectores en ambas direcciones para cada nodo.

PRESENTACIÓN DEL PROGRAMA "INTERSL" Y SU APLICACIÓN.

El objetivo del programa "*Intersl*", es realizar un análisis estático de una losa de fundación plana de sección rectangular, de espesor constante, tomando en cuenta la interacción suelo estructura, donde la losa de fundación debe ser dividida en una malla de diferencias finitas, la cual debe contener un mismo espaciamiento "*h*" entre nodos en ambas direcciones de coordenadas.

El modelo de suelo que se utilizó para este propósito es el modelo Winkler, considerando un coeficiente de Balasto constante en todos los puntos de la malla, con las expresiones de las diferencias finitas para aproximar la solución de la ecuación diferencial a flexión en placas delgadas.

El programa "*Intersl*" está diseñado en el entorno de programación MATLAB 7.10, se sabe que existen una variedad de lenguajes de programación,

algunos con más bondades que otros, algunos más que otros difíciles en su aplicación como en su elaboración y configuración.

Se eligió MATLAB debido a que es un programa más orientado a cálculos matriciales lo cual es favorable para el cálculo de las diferencias finitas, utilizando MATLAB los cálculos son más rápidos y se hace fácil realizar la manipulación y el control de los datos matriciales y vectoriales.

La ventaja de este lenguaje es la facilidad de comprensión, la sintaxis de MATLAB es fácil de comprender, la escritura y modificación de programas puede ser efectuada fácilmente mediante la interacción entre el programador y la computadora, otra ventaja interesante es que permite graficar todo tipo de funciones en 2D y 3D de una manera práctica y sencilla la cual sirve de mucho apoyo al momento de comprobar resultados. Por todo lo mencionado MATLAB es el programa que mejor se aplica a los requerimientos del programa "*Intersl*".

ANÁLISIS DE LOSA DE FUNDACIÓN POR EL MÉTODO DE LAS DIFERENCIAS FINITAS PARA DIFERENTES COEFICIENTES DE BALASTO

Se tomará una losa de sección rectangular con las siguientes dimensiones y características de la misma.

Dimensiones de la losa: 14m x 15m:

- Longitud1: 14.00 m
- Longitud 2: 15.00 m
- Se asume, para losas de cimentación, un espesor mínimo de 0.40 m.

Características de la losa de hormigón armado:

- Módulo de elasticidad: 2.1×10^9 kg/m^2
- Coeficiente de Poisson: 0.15

El coeficiente de balasto, según la Clasificación Unificada se determina a partir de los siguientes tipos de suelo:

Tabla 1. Suelo 1

Clasificación	Denominación	Coeficiente de Balasto (N/mm^3)	Observaciones
CH	*Arcilla inorgánica de alta compresibilidad (arcilla densa)*	$K_{s30} = 0.04 - 0.09$	*Aproximaciones del módulo de Balasto (Cálculo de Estructuras de Cimentación – Calavera)*
		$K_{s30} = 6500000$ Kg/m^3	*Tomando la media*

Tabla 2. Suelo 2

Clasificación	Denominación	Coeficiente de Balasto (N/mm^3)	Observaciones
CL	*Arcilla inorgánica de baja a mediana compresibilidad (arcilla limo arenosa)*	$K_{s30} = 0.90 - 0.13$	*Aproximaciones del módulo de Balasto (Cálculo de Estructuras de Cimentación – Calavera)*
		$K_{s30} = 11000000$ Kg/m^3	*Tomando la media*

Para cimentaciones cuadradas:

Como nuestros suelos son arcillas, solo se trabajará con esta ecuación para calcular el coeficiente de balasto para cimentaciones cuadradas:

Para suelos arcillosos:

$$k_S = k_{S30}\left[\frac{0.3}{b}\right]$$

Para cimentaciones rectangulares:

$$k_{S\ Rectangular} = \frac{2}{3}k_{S\ Cuadrada}[1 + B/2L]$$

Aplicando estas ecuaciones y para los dos tipos de suelos se tiene respectivamente:

Para el suelo 1

$K_{s30} = 6500000$ Kg/m^3

b= 14.0 m (ancho equivalente)

L= 15.0 m (lado mayor)
K_{sc} = *139286.0 Kg/m³*
K_{sr} = *136190.0 Kg/m³*
Se toma un valor de 136000 Kg/m³

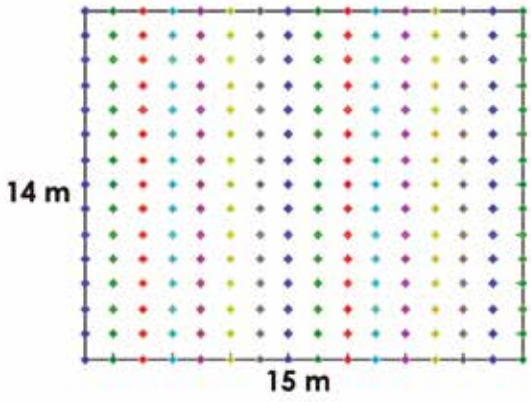
Para el suelo 2

K_{s30} = *11000000 Kg/m³*
b= 14.0 m (ancho equivalente)
L= 15.0 m (lado mayor)
K_{sc} = *235714.0 Kg/m³*
K_{sr} = *230476.0 Kg/m³*
Se toma un valor de 230000 Kg/m³

Determinación de filas y columnas:

Las filas y columnas dependerán de las longitudes que tenga la losa, en este caso se tendrá 15 filas y 16 columnas, que conformaran la malla de diferencias finitas, obteniendo 240 nodos con espaciamiento entre nodos de 1*m*.

Figura 4 División de la losa en nodos.



- Esta losa de cimentación estará sometida al siguiente sistema de cargas:
  - Peso propio (carga uniformemente distribuida en toda la losa).
    Peso específico del hormigón=2400 kg/m3
    q= 2400*0.4 =960 kg/m2
  - Cargas puntuales verticales (transmitidas por las columnas).

Tabla 3. Cargas puntuales para el análisis de la losa.

N°	Fila	Columna	Peso (Tn)	Peso (kg)
1	2	2	15	15000
2	2	5	25	25000
3	2	9	35	35000
4	2	15	30	30000
5	6	2	25	25000
6	6	5	40	40000
7	6	9	60	60000
8	6	15	40	40000
9	10	2	25	25000
10	10	5	40	40000
11	10	9	60	60000
12	10	15	40	40000
13	14	2	15	15000
14	14	5	25	25000
15	14	9	35	35000
16	14	15	30	30000

Una vez teniendo todos los datos necesarios para el desarrollo del análisis de la losa de fundación, utilizamos el programa "*Intersl*" para obtener las deformaciones, presiones de contacto, reacciones, fuerzas cortantes y momentos flectores.

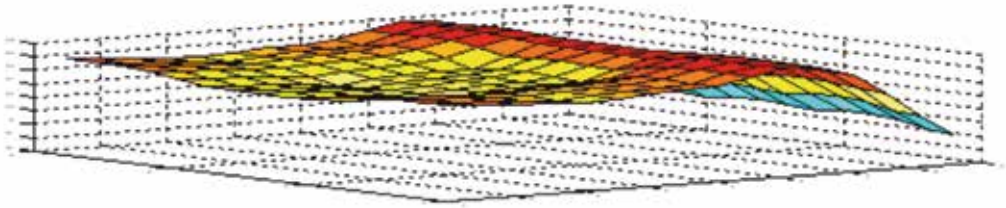
Resultados:

CONSIDERACIONES AL ANÁLISIS CON DIFERENTES COEFICIENTES DE BALASTO

Analizando los resultados para dos diferentes coeficientes de Balasto podemos llegar a las siguientes consideraciones:

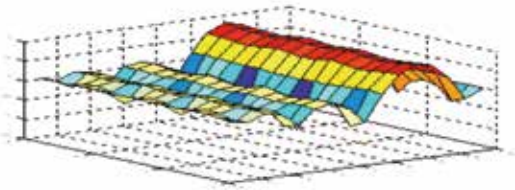
- Podemos ver que los dos coeficientes de análisis, cuya diferencia es de un 40.87 %. A partir de ello se puede estimar las variaciones que existen en las deformaciones y momentos flectores.
- Para un coeficiente de Balasto de Ks=136000 Kg/m3 se obtuvo una deformación máxima de 3.02cm, a comparación de un Ks=230000 Kg/m3 que arrojó una deformación máxima de 1.89cm, es decir que si menor es el coeficiente de Balasto mayores serán las deformaciones; en este caso la diferencia entre las deformaciones máximas fue de un 37.42 %.

Figura 5 Grafica tridimensional de las deformaciones.



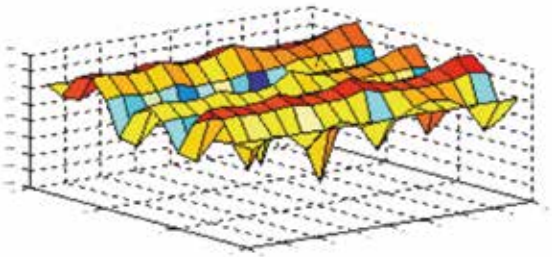
- A medida que el coeficiente de Balasto aumenta en su valor, las deformaciones de la losa de fundación disminuyen, por lo que se reducen los momentos flectores máximos.
- Con respecto a los momentos positivos en el eje X podemos observar que existe entre ambos tipos de suelos existe una diferencia del 2.3 %. Es decir que para el suelo 1 se tiene un momento de 10703.00 Kg-m y para el suelo 2 un momento de 10954.0 Kg-m.

Figura 6. Grafica tridimensional de los momentos flectores en X.



- En los momentos positivos en el eje Y existe una diferencia de 0.7 %. Para el suelo 1 se tiene un momento de 10071.0Kg-m, y para el suelo 2 se tiene un momento de 10001.0 Kg-m.

Figura 7. Grafica tridimensional de los momentos flectores en Y.



- Es entonces que la variación del coeficiente de Balasto afecta en porcentajes mínimos a los momentos flectores que se obtiene mediante este análisis. Se aprecia una relativa baja sensibilidad de las diferencias en el momento máximo, por sobreestimación en el módulo de reacción del suelo de soporte.

COMPARACIÓN DE ANÁLISIS MEDIANTE DIFERENCIAS FINITAS, PROGRAMA "INTERSL", CON OTRO PROGRAMA ESTRUCTURAL.

Se utilizó el programa SAP2000, para analizar los dos anteriores casos de losas con coeficientes de Balasto diferente, el objetivo de este análisis fue investigar la incidencia de variaciones que se tiene de un método a otro, el porcentaje de variación de las deformaciones. A continuación, se presentan los valores máximos de las deformaciones y de las reacciones en los nodos.

- Para un coeficiente de Balasto de *136000 kg/m³* se obtuvo una deformación máxima de *0.0372 m*, es decir *3.72 cm*, donde varia un *18.8%* más con el método de los elementos finitos a comparación del método de las diferencias finitas.
- Para un coeficiente de Balasto de *230000 kg/m³* se obtuvo una máxima deformación de 2.31 cm, teniendo una variación de *18.05%* más en el método de los elementos finitos a comparación de la utilización de las diferencias finitas.
- Las reacciones máximas obtenidas en el SAP2000 fueron de *4814.84 Kg* y *4941.61 Kg* para un coeficiente de Balasto de *130000 kg/m³* y *230000 kg/m³* respectivamente, y las reacciones obtenidas mediante las diferencias finitas fueron de *3869.90 Kg* y *4006.0 Kg*, con una variación aproximada del *19 %* en favor al método de los elementos finitos.

DISCUSIÓN

- El método de las diferencias finitas permite plantear soluciones matriciales al problema de elementos de fundación sobre suelo de soporte modelado de acuerdo a la hipótesis de Winkler, es un método abreviado que consiste en el reemplazo de las ecuaciones diferenciales parciales, por sus correspondientes ecuaciones de diferencias finitas, a fin de obtener un conjunto de ecuaciones algebraicas simultáneas más sencillas de resolver.
- Las diferencias finitas representan un método adecuado para realizar el análisis de la interacción suelo-estructura de fundación, donde de manera más sencilla se pueden determinar las deformaciones de la losa.
- El modelo de Winkler propone que la deflexión, *w(x,y)*, en cualquier punto de la superficie del

suelo de soporte es linealmente proporcional a la presión de contacto *q(x,y)* en ese punto, e independiente de los esfuerzos de contacto en otros puntos; es por esto que el suelo de soporte consiste en un sistema de elementos resortes lineales mutuamente independientes. Existen muchos problemas en la ingeniería para los cuales este modelo representa una idealización adecuada.

- Para determinar el coeficiente de Balasto es muy importante determinar las propiedades físico-mecánicas del suelo, y así poder tener un valor más real que represente al suelo; Como también conocer la geometría de la fundación, ya que su variación también dependerá de la misma.
- Mediante las diferencias finitas podemos generar soluciones manuales, pero resulta más ventajoso generar algoritmos y ecuaciones generales que faciliten soluciones computarizadas académicas.
- En el análisis de losas de fundación, utilizando el programa "*Intersl*", podemos determinar las presiones de contacto y las reacciones del suelo hacia la losa, como también podemos obtener las fuerzas cortantes, y los momentos flectores que nos ayudarán para el diseño de las mismas.
- "*Intersl*" es un programa que sólo es aplicable al análisis de losas de fundación planas de sección rectangular, de espesor constante, tomando en cuenta la interacción suelo estructura, considerando un coeficiente de Balasto constante en todos los puntos de la malla. Las cargas actuantes serán cargas gravitacionales, distribuidas en toda la losa y concentradas debiendo ubicarse exactamente en los nodos de la malla. Por último, la malla debe tener un mínimo de cinco filas y cinco columnas.
- El método de las diferencias finitas en la interacción suelo-estructura se puede aplicar, no solo tomando en cuenta el modelo de Winkler sino también otros modelos que representen el suelo, como Vlasov-Pasternak y el Semiespacio elástico. Ya que las diferencias finitas son de fácil aplicación.

- Es preferible realizar ensayos de laboratorio, para determinar las mayores propiedades físico-mecánicas del suelo y poder obtener un coeficiente de balasto con mayor precisión del terreno de análisis, como:

1. Correlaciones empíricas del módulo elástico del suelo obtenido en ensayos de laboratorio.
   - Ensayo triaxial o de compresión no confinada.
   - Ensayo de CBR.
   - Ensayo de consolidación.

2. Correlaciones empíricas con resultados de ensayos de campo en el sitio (SPT, CPT, DPT y veleta).
   - Correlaciones empíricas directas con el ks1.
   - Correlaciones empíricas indirectas con el módulo elástico o la resistencia al corte no drenado del suelo.

BIBLIOGRAFÍA

- Ballinas-Mijangos, R.J., (2006) Suelos Expansivos. Tesis de Maestro en Ingeniería. México, Ingeniería Civil – Análisis y Diseño de Cimentaciones, Universidad Nacional autónoma de México.
- Delgado-Vargas, M., (1993) "Coeficiente de Balasto" Segundo encuentro Nacional de Ingenieros de Suelos y Estructuras, Septiembre de 1993, Santa Fe de Bogotá.
- Freire –Tellado, M. J. (2001) "Interacción del suelo, cimiento y estructura: el caso de las zapatas (1ra parte)" en Informes de la construcción. Volumen 52, Nº 471, Enero/Febrero 2001, pp. 45-58.
- Otálvaro I. F. y Nanclares F. J., (2009) "Elementos para Obtener el Modulo de Reacción de Subrasante" en Dyna. Año 76, Nº 157, Marzo 2009, pp. 81-89.
- Santos-Miñon, J. (1980) "Interacción estática suelo – estructura. Modelos de suelos empleados" en Revista de Obras Públicas. Febrero- Marzo 1980, pp. 181-191.