

ARTÍCULO DE INVESTIGACIÓN

MODELOS MATEMÁTICOS PARA LA  
ESTIMACIÓN DEL "CAPITAL HÍDRICO"  
EN LA CUENCA DEL PLATA (BOLIVIA):  
ENFOQUE SISTÉMICO Y ANÁLISIS  
MULTIVARIADO

MATHEMATICAL MODELS FOR THE ESTIMATION OF "WATER CAPITAL" IN THE PLATA  
BASIN (BOLIVIA): SYSTEMIC APPROACH AND MULTIVARIATE ANALYSIS

Fecha de recepción: 26-10-2022 | Fecha de aceptación: 01-12-2022

Autor:

<sup>1</sup> Benítez Reynoso Alberto

<sup>1</sup>Ingeniero Civil, M.Sc., M.E.,  
Ph.D., Dr.Sc., Post Doctorado  
en Ingeniería, docente (grado  
y posgrado) y coordinador de  
Programas Doctorales en la  
UAJMS.

Correspondencia del autor: [albertobenitez@uajms.edu.bo](mailto:albertobenitez@uajms.edu.bo)<sup>1</sup>,  
Tarija- Bolivia.



## RESUMEN

La estimación cuantitativa del "Capital Hídrico Superficial", entendido como oferta o disponibilidad del agua superficial, resulta importante como proceso previo a la formulación de políticas económicas, sociales y ambientales. Dicha estimación se realiza, habitualmente, a partir de mediciones hidrométricas en determinadas corrientes naturales de agua y puntos estratégicos de las mismas.

La cuenca internacional del Río de La Plata tiene un capital hídrico superficial muy importante, sin embargo, en la parte boliviana de la misma, las estaciones hidrométricas donde se realizan mediciones, son muy pocas, lo que incide en la precisión de la estimación mencionada.

Considerando las mediciones realizadas en las estaciones hidrométricas disponibles, algunos parámetros físicos y pluviométricos, adoptando un enfoque sistémico y aplicando el análisis multivariado (regresión múltiple), se formulan modelos matemáticos que permiten estimar el capital hídrico superficial, expresado como caudal medio anual, en cualquier sub cuenca de la cuenca del Plata (parte boliviana), que no disponga de mediciones hidrométricas.

Estos modelos tienen varias aplicaciones como la planificación hidrológica, comparación con la demanda, formulación de políticas públicas y privadas, determinación de la propiedad relativa del agua superficial y otras.

## ABSTRACT

The quantitative estimation of "Surface Water Capital", understood as the supply or availability of surface water, is important as a process prior to the formulation of economic, social and environmental policies. This estimation is usually made from hydrometric measurements in certain natural water currents and strategic points thereof.

The international basin of the Río de La Plata has a very important surface water capital, however, in the Bolivian part of it, the hydrometric stations where measurements are made are very few, which affects the accuracy of the aforementioned estimate.

Considering the measurements made in the available hydrometric stations, some physical and rainfall parameters, adopting a systemic approach and applying multivariate analysis (multiple regression), mathematical models are formulated that allow estimating the surface water capital, expressed as average annual flow, in any sub-basin of the Plata basin (Bolivian part), which does not have hydrometric measurements.

These models have various applications such as hydrological planning, comparison with demand, formulation of public and private policies, determination of the relative ownership of surface water and other.

**Palabras Claves:** Modelos matemáticos, capital hídrico, mediciones hidrométricas, enfoque sistémico, análisis multivariado.

**Keywords:** Mathematical models, water capital, hydrometric measurements, systemic approach, multivariate analysis.

# 1. INTRODUCCIÓN

## 1.1. CARACTERIZACIÓN DE LA PROBLEMÁTICA

El agua dulce y su equilibrio con los demás componentes del ciclo hidrológico, que se ha convertido, en un recurso estratégico, ha sido, y seguirá siendo objeto de estudios, investigaciones, eventos de las más diversas características y escalas, debates políticos, seminarios técnicos, reuniones de carácter científico, etc. Muchas de estas iniciativas se originan en las políticas que se vienen definiendo con base en los acuerdos suscritos por casi todos los países del mundo en varios escenarios de diferentes denominaciones. el “Seminario Internacional sobre Uso Eficiente del Agua” (México, 1991), la “Declaración de Dublín” (Conferencia Internacional del Agua y el Medio Ambiente, 1992) y la “Agenda 21” (Cumbre de la Tierra, Río de Janeiro, 1992) y el Protocolo de Kioto (1998) son ejemplos a nivel internacional.

Algunos conceptos, afirmaciones y definiciones, planteados en los citados eventos, han causado mucho impacto en todo el planeta y particularmente en el continente sudamericano y Bolivia. Por su importancia se citan:

- ⊕ “La tierra se conoce como el planeta azul porque su superficie es principalmente agua, aun así, mil quinientos millones de personas sufren escasez severa de agua limpia y más de diez millones de muertes resultan de enfermedades hídricas” [Garduño y Arreguín, 1994].
- ⊕ “La escasez y uso abusivo del agua dulce plantean una creciente y seria amenaza para el desarrollo sostenible y la protección del medio ambiente. La salud y el bienestar humanos, la seguridad alimentaria, el desarrollo industrial y los ecosistemas de que dependen se hallan todos en peligro, a no ser que la gestión de los recursos hídricos y el manejo de los suelos se efectúen en el presente decenio y aún más adelante de forma más eficaz que hasta ahora.” [Declaración de Dublín sobre el Agua y el Desarrollo Sostenible, 1992].

- ⊕ “La humanidad se encuentra en un momento decisivo de la historia. Nos enfrentamos con la perpetuación de las disparidades entre las naciones y dentro de las naciones, con el agravamiento de la pobreza, el hambre, las enfermedades y el analfabetismo y con el continuo empeoramiento de los ecosistemas de los que depende nuestro bienestar. No obstante, si se integran las preocupaciones relativas al medio ambiente y al desarrollo y si se les presta más atención, se podrán satisfacer las necesidades básicas, elevar el nivel de vida de todos, conseguir una mejor protección y gestión de los ecosistemas y lograr un futuro más seguro y más próspero. Ninguna nación puede alcanzar estos objetivos por sí sola, pero todos juntos podemos hacerlo en una asociación mundial para un desarrollo sostenible” [Agenda 21, 1992].

## 1.2. CONOCIMIENTO HIDROLÓGICO NACIONAL, LOCAL Y JUSTIFICACIÓN

Algunos criterios, compatibles con la realidad nacional, que se plantean para justificar la temática investigada, se resumen a continuación:

- ⊕ La situación, tanto nacional como regional, no escapa de la tendencia mundial con relación a la gestión de la calidad y la cantidad de los recursos hídricos superficiales. Bolivia se caracteriza por ser cabecera de una de las cuencas más importantes del continente sudamericano, la Cuenca del río de La Plata. Un sondeo con varias autoridades bolivianas permite establecer que ni éstas, ni los técnicos del sector conocen la cantidad ni la calidad del agua disponible. Por lo tanto, tampoco se sabe las relaciones que existen entre los diferentes procesos componentes del ciclo hidrológico en la cuenca. Si las autoridades y técnicos involucrados no conocen la realidad hídrica, el desconocimiento es más grande aún en la mente de los habitantes.

- ⊕ La cuenca del Río de La Plata es un medio vulnerable desde el punto de vista ambiental, consecuentemente, al ser el agua un elemento estratégico y vital para la supervivencia de cualquier ecosistema se hace absolutamente imprescindible conocer y predecir, al menos, las variables y procesos hidrológicos más importantes de los cuales depende cualquier forma de vida en la región. En especial, es sumamente importante determinar, cuantitativamente, los procesos componentes del ciclo hidrológico en la cuenca y sus relaciones.
- ⊕ La ordenación de los recursos hídricos en Bolivia y el fortalecimiento de la capacidad de amortiguación del medio ambiente frente a conmociones inesperadas o a las tendencias a largo plazo, son elementos a tomar en cuenta. Será necesario considerar opciones que permitan responder a las situaciones venideras.

El cambio climático que hoy ya nadie discute está propiciando una mayor frecuencia en la sucesión de eventos extremos, avenidas y sequías [Cabrera, E. y otros, 2003].

- ⊕ El otro elemento que permite justificar la temática tiene relación con la gestión de los recursos hídricos, entendiendo como tal una serie de acciones y medidas conducentes a usar y controlar el insumo de los recursos naturales (agua incluida), a fin de obtener unos resultados y unas condiciones de los sistemas naturales que resulten de utilidad para la sociedad. El énfasis debería ponerse en mejorar la gestión del agua, en la conservación de la cantidad y calidad del agua y en el control de la contaminación [Sauquillo, A., 2000].

Sin embargo, si no se conocen, con un grado razonable de precisión, los procesos hidrológicos, cualitativos, cuantitativos, espaciales, temporales y sus relaciones cuantitativas, no se podrá ser eficaz en la gestión.

### 1.3. LOS PROBLEMAS ESPECÍFICOS

Si se trata de ser más específicos con relación a la problemática que se pretende plantear y resolver mediante esta investigación, es necesario destacar que, pese a que el territorio boliviano sirve de cacerera y aporta con sus recursos hídricos a grandes cuencas hidrográficas, no ha podido resolver sus problemas globales relacionados con la gestión de los recursos hídricos. Estos problemas, entre otros, se sintetizan a continuación.

- ⊕ **La planificación hidrológica:** Que se concibe como un instrumento fundamental para la gestión sostenible del recurso hídrico y la definición de políticas públicas; el agua como elemento crucial para el desarrollo de la vida debe ser objeto de un estudio profundo que permita definir cuál es su estado actual y sus posibilidades de utilización. La Planificación debe establecer el vínculo entre la situación actual y un futuro ordenado y lógico donde se combine un aprovechamiento racional de los recursos hídricos con la satisfacción de las necesidades presentes y futuras.
- ⊕ **Los estudios y las mediciones hidrológicas:** La planificación hidrológica busca el balance entre la demanda y oferta agua. Consecuentemente, la cuantificación del recurso hídrico resulta fundamental, lo que permitirá, junto con la demanda y otros factores, definir acciones, realizar estudios y poner en marcha planes, programas y proyectos conducentes a satisfacer las citadas demandas de la población actual y futura. Para la estimación de las cantidades de los recursos hídricos superficiales (capital hídrico superficial) por unidades territoriales, por ejemplo, cuencas hidrográficas, es imprescindible contar con mediciones de las variables hidrológicas (por ejemplo, el caudal) en calidad y cantidad deseables. Bolivia se caracteriza, en el marco de la planificación hidrológica, por tener una red pobre de estaciones de medición de las variables hidrológicas y meteorológicas más

importantes. Este es un factor que, evidentemente, afecta a la planificación hidrológica y la cuantificación del recurso hídrico superficial. La pobreza citada, en torno a las mediciones hidrológicas, conduce a una estimación imprecisa de los recursos hídricos disponibles.

**+** **La sensibilidad de los procesos del ciclo hidrológico:**

Considerando la vulnerabilidad, mencionada anteriormente, y la ocurrencia de fenómenos extremos como sequías, avenidas, etc., y sus consecuencias, sería importante contar con un instrumento que permita determinar la influencia de la modificación de una variable hidrológica en las otras. Por ejemplo, cuál es la influencia de una disminución de la precipitación pluvial en la oferta de los recursos hídricos superficiales. Se trata de estudiar la sensibilidad de los procesos del ciclo hidrológico en la cuenca cuando alguno de ellos, sufre una modificación cuantitativa importante. Naturalmente, esto se podrá hacer sólo contando con relaciones cuantitativas confiables entre los diferentes procesos del ciclo hidrológico en la cuenca.

**+** **La estimación del caudal en ausencia de registros hidrométricos:**

Otro problema de la cuenca consiste en estimar la oferta de agua superficial en aquellas sub cuencas y unidades topológicas para las cuales no se tienen mediciones. Este, claramente, es un problema que limita la calidad de los estudios específicos y de la planificación hidrológica global. Para resolver este problema, para el sistema “Cuenca del Río de La Plata” y sus respectivas sub cuencas o cuencas más pequeñas, se plantea desarrollar las relaciones (modelos matemáticos) entre los diferentes procesos del ciclo hidrológico, de manera que, cuando se quiera estimar, por ejemplo, el caudal medio anual en una sub cuenca carente de mediciones, se lo haga a partir de las mediciones realizadas en las otras sub cuencas, mediante las citadas relaciones matemáticas.

**+** **Los municipios de Bolivia y los recursos hídricos:**

Los problemas de propiedad del recurso hídrico, en los cursos internacionales de agua, son objeto de un debate permanente y han dado lugar a estudios, investigaciones e inclusive conflictos entre los países que creen tener derechos sobre el agua. Dentro del territorio boliviano existe una analogía con el citado problema. Por ejemplo, la Cuenca Alta del río Bermejo, cuyo curso principal nace en la Provincia Méndez (Tarija), la misma que tiene tres Municipios, pasa por la ciudad de Tarija y la Provincia Cercado, que constituye otro Municipio y termina en Bermejo, municipio que pertenece a la provincia Arce. Además, el río Bermejo tiene varios afluentes pertenecientes a la provincia O’connor. No está descartada la posibilidad de que, entre municipios que forman parte de una misma cuenca, sub cuenca o unidad topológica, se presenten conflictos respecto a la propiedad del recurso hídrico. Entonces, los modelos o relaciones matemáticas entre los diferentes procesos del ciclo hidrológico, que se desarrollan más adelante, podrían ser usados para determinar la magnitud del aporte de cada municipio a la totalidad de recursos hídricos de la cuenca.

**+** **El nuevo orden legal:**

La Constitución Política del Estado, vigente desde febrero de 2012, la Ley No. 300 (Ley Marco de la Madre Tierra y Desarrollo Integral para Vivir Bien), así como otras normas legales específicas, han creado nuevas condiciones respecto de los recursos naturales en general y la gestión del agua en particular. Por ejemplo, es absolutamente destacable el Artículo 373 de la Constitución Política del Estado, que, en su parágrafo I se refiere al agua como un derecho fundamentalísimo para la vida. Asimismo, el parágrafo II del mismo artículo, se refiere a la función social, cultural y ambiental de los recursos hídricos, que no podrán ser objeto de apropiaciones privadas y están sujetos a un régimen de licencias, registros y autorizaciones conforme a Ley.

En suma, dado el nivel de estudio de la presente investigación y considerando los seis aspectos explicados en los párrafos precedentes, se formulan las siguientes preguntas científicas:

- ⊕ ¿Qué relaciones cuantitativas o modelos matemáticos existen entre los principales componentes o procesos del ciclo hidrológico (escurrimiento o caudal y precipitación pluvial) y los parámetros físicos de las cuencas, en la gran Cuenca del Plata (parte boliviana)? O, expresado de otra manera, desde el punto de vista del enfoque sistémico:
- ⊕ ¿Cuáles son las ecuaciones (modelos matemáticos) o funciones de transformación, de entradas en salidas, para los diferentes procesos hidrológicos en sistema "Cuenca del Río de La Plata" y sus subcuencas?
- ⊕ ¿Cómo predecir uno de los procesos del ciclo hidrológico en la cuenca conociendo otro u otros componentes?
- ⊕ ¿Cómo afecta la modificación cuantitativa de un proceso del ciclo hidrológico a otro u otros dado que forman parte de un mismo sistema?
- ⊕ ¿Cómo estimar, a nivel anual, el recurso hídrico superficial de un determinado territorio (por ejemplo, municipio), si no se cuentan con las mediciones hidrológicas pertinentes?
- ⊕ ¿Cómo asociar el valor económico del agua superficial (capital hídrico superficial) a una probabilidad, basada en la satisfacción de la demanda?

#### 1.4. OBJETIVOS GENERALES

- ⊕ Contribuir al conocimiento general de la hidrología en la cuenta multinacional del río de La Plata (parte boliviana).

- ⊕ Proveer a los planificadores hidrológicos, académicos, autoridades, investigadores, etc., de modelos matemáticos (ecuaciones) que permitan la estimación del capital hídrico superficial, expresado en términos de caudal medio anual, de utilidad en la planificación hidrológica global.

#### 1.5. OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- ⊕ Integrar, matemáticamente, los procesos más importantes del ciclo hidrológico (a nivel anual) en la Cuenca del Plata (parte boliviana), desarrollando las relaciones (modelos matemáticos) entre estos componentes como parte de un sistema, "el ciclo hidrológico en la cuenca". O, desde el punto de vista sistémico: generalizar, para el sistema "Cuenca del Río de la Plata (parte boliviana)" y sus sub cuencas, las ecuaciones (modelos matemáticos) o funciones de transformación, de entradas en salidas, obtenidas por el autor para la Cuenca Alta del Guadalquivir (Benítez, 2003).
- ⊕ Incorporar al estudio parámetros adicionales que pudiesen explicar las citadas relaciones, tales como el área de la cuenca, la pendiente del curso principal y otros.
- ⊕ Formular pautas que permitan a los planificadores hidrológicos aplicar los modelos matemáticos generados para diferentes fines.

#### 1.6. HIPÓTESIS

Se plantean las siguientes hipótesis:

- A. Es posible establecer relaciones cuantitativas, que pueden ser traducidos en modelos matemáticos o ecuaciones, entre los principales procesos del ciclo hidrológico, tales como el caudal medio anual (capital hídrico superficial), la precipitación media anual y algunos parámetros físicos de las sub cuencas tales como área en proyección horizontal, pendiente del curso principal, entre otros.

B. La relación matemática general (modelo matemático) entre los procesos del ciclo hidrológico y los parámetros físicos de las sub cuencas, del sistema “Cuenca del Río de La Plata”, o ecuación de transformación de entradas en salidas, a nivel anual, es de la forma:

$$Y = \beta_0 X_1^{\beta_1} X_2^{\beta_2} \dots X_n^{\beta_n} \quad (1)$$

En la cual:

- ⊕ Y = variable de uno de los procesos del ciclo hidrológico (por ejemplo, el caudal Q), que es considerada como la variable dependiente;
- ⊕  $X_1, X_2, \text{etc.}$ , son variables de otros procesos del ciclo hidrológico o parámetros de las cuencas tales como la precipitación pluvial media anual, H, el área de la cuenca, A, la pendiente del curso principal, S, etc.
- ⊕  $\beta_1, \beta_2, \text{etc.}$ , son los coeficientes, propios del modelo, obtenidos mediante la metodología general que se explica más adelante.

## 1.7. EL ÁREA DE ESTUDIO

La cuenca del río de la Plata tiene una extensión cercana a los 4 millones de km<sup>2</sup>, que se extienden por los territorios de Argentina, Bolivia, Brasil, Uruguay y Paraguay, estando, este último país, totalmente dentro de la cuenca.

En la cuenca del Plata se destacan importantes ríos como el Paraná, uno de los más grandes y caudalosos del mundo; además cuenta con dos afluentes importantes que son el Río Paraguay y el Río Uruguay. Este conjunto hidrográfico desemboca en el Río de la Plata y por intermedio de este en el Océano Atlántico. El caudal medio de la cuenca es de 23.000 m<sup>3</sup> por segundo.

En Bolivia, la Cuenca del Plata se encuentra situada al sureste, ocupa una superficie aproximada de 226.268 Km<sup>2</sup>, cubre el 20.6 % de la superficie del territorio nacional, constituye geográficamente la

segunda cuenca en extensión. La Cuenca del Plata, comprende la totalidad del departamento de Tarija y una parte de los departamentos de Santa Cruz, Chuquisaca, Potosí y Oruro. Se divide en tres otras cuencas, las cuales están determinadas por los colectores principales, estos ríos corren en dirección general norte – sureste, a saber: Cuenca del río Paraguay, Cuenca del río Pilcomayo y Cuenca del río Bermejo.

A su vez, en la cuenca del río Bermejo se identifican dos áreas características: Cuenca Alta del río Bermejo y Cuenca Baja del río Bermejo.

La cuenca Alta del río Bermejo, la cuenca del río Pilcomayo y la cuenca del río Paraguay, dentro del territorio nacional, constituyen, en consecuencia, la parte boliviana de la Cuenca multinacional del río de La Plata y son las áreas objeto de la presente investigación, aunque, en el caso de la cuenca del río Paraguay en Bolivia, en el área oriental (Santa Cruz de la Sierra), sus principales afluentes (San Rafael, Tucavaca y Outuquis), tienen aguas que se embalsan y encharcan concluyendo en aquella parte de los bajíos pantanosos de la “Punta Man Cesped”, es decir, no llegan al propio curso del río Paraguay sino a través de lagunas o bahías.

En consecuencia, desde el punto de vista del capital hídrico superficial, expresado como caudales medios anuales, las cuencas generadoras de este capital, en la parte boliviana de la Cuenca del Plata, son la Alta Cuenca del Bermejo (río Grande de Tarija y río Bermejo con todos sus afluentes) y la Cuenca del Pilcomayo (río Pilcomayo y afluentes).

## 2. MATERIALES Y MÉTODOS

Tal como se describe en los párrafos siguientes, se trata de una investigación mixta (cualitativa y cuantitativa), empírica y correlacional y se han usado las metodologías que se especifican [Thomas, C.G. 2021; Mukherjee, S.P., 2020 y Sampieri, R.H. & Mendoza, C.P., 2018; Benítez, 2013; Bunge, 2011].

## 2.1. EL ANÁLISIS MULTIVARIADO EN HIDROLOGÍA

Las facilidades de cómputo que se tienen hoy han revolucionado el campo de la modelación matemática de una manera sorprendente. Las grandes cantidades y la complejidad de las operaciones matemáticas, que no podían ser hechas hasta hace unas cuatro décadas, hoy en día se procesan en unos cuantos segundos gracias a la disponibilidad de instrumentos (computadoras) de alta velocidad con un potencial impensable de cálculo. Precisamente, el análisis multivariado requiere de una gran cantidad de operaciones que hoy por hoy ya no representan un problema.

El análisis multivariado no es fácil de definir. En un sentido amplio, se refiere a todos los métodos estadísticos que analizan simultáneamente medidas múltiples de cada objeto sometido a investigación. Cualquier análisis simultáneo de más de dos variables puede ser considerado aproximadamente como un análisis multivariado.

Dentro de los tipos de análisis multivariado se tiene la regresión múltiple, que es el método apropiado cuando el problema del investigador incluye una variable dependiente que se supone está relacionada con una o más variables independientes. El objetivo del análisis multivariado mediante la regresión múltiple, entonces, es predecir los cambios en la variable dependiente en respuesta a los cambios de las variables independientes. Este objetivo, se consigue muy a menudo mediante el método estadístico de los mínimos cuadrados [Maity, R. 2022; Backhaus, K., et al. 2021; Arkes, J., 2019].

En el campo de la hidrología, ha habido varias experiencias satisfactorias con relación al uso del análisis multivariado, particularmente en lo que respecta a la regresión múltiple. Varios autores se refieren a la importancia del uso del análisis multivariado y de la regresión múltiple, como parte del primero, en la hidrología [Benítez, 2021, 2003, 1996; Holder, 1985; Yevjevich, 1972].

Luego, para la modelación matemática se ha usado el análisis multivariado (regresión múltiple), con el método de los cuadrados mínimos.

## 2.2. ENFOQUE SISTÉMICO Y MODELACIÓN MATEMÁTICA

Los conceptos y elementos teóricos y metodológicos que siguen son han sido fundamentales en la presente investigación [Thurner, S., Hanel, R. & Klimek, P. 2018; Baltas, E.A. & Tsihrintzis, V.A., 2016; Dooge & O'Kane, 2003; Dooge, 1973]

Un sistema es cualquier estructura, aparato, esquema o procedimiento, real o abstracto (conceptual), que interrelaciona, en un tiempo dado, una entrada, causa o estímulo, de materia, energía e información con una salida, efecto o respuesta de información, energía o materia. Esta definición es la más aceptada en este campo, definición que pone de manifiesto algunas de las características más importantes de un sistema:

- ⊕ Un sistema puede constar de más de un componente;
- ⊕ Estos componentes pueden estar separados, pero, pueden ser interdependientes;
- ⊕ Un sistema relaciona la entrada con la salida, la causa con el efecto, el estímulo con la respuesta;
- ⊕ Esta relación se produce en un determinado tiempo;
- ⊕ En un sistema, la entrada no es necesariamente del mismo tipo o característica que la salida;
- ⊕ La entrada no es, sino que puede tener carácter vectorial o variabilidad en tiempo y espacio;
- ⊕ Un sistema puede ser real o abstracto;

Los fenómenos hidrológicos son muy complejos y es posible que nunca se los entienda en su totalidad. Sin embargo, en ausencia de un conocimiento perfecto, pueden representarse en forma simplificada mediante el concepto de sistema.

El ciclo hidrológico, en particular, puede tratarse como un sistema cuyos componentes son la precipitación, el escurrimiento o caudal, la evapotranspiración, etc. Estos componentes, a su vez, pueden agruparse en subsistemas de la totalidad del ciclo.

En el estudio de una cuenca, lo más importante no consiste en considerar la acción o papel particular de cada uno de sus elementos constitutivos: agua, suelo, clima, etc., sino en la interacción de éstos como un todo, es decir, como un sistema.

La cuenca hidrológica, también puede ser tratada bajo el concepto de sistema. En este caso, la “frontera del sistema” se dibuja alrededor de la cuenca, proyectando la divisoria de aguas verticalmente hacia arriba y abajo hacia planos horizontales. Por eso, cuando se determina el área de una cuenca, se lo hace en proyección horizontal.

En el marco de la teoría de sistemas, considérese que la lluvia media anual es la entrada al sistema “cuenca del río de La Plata”, distribuida en la totalidad del área de la cuenca. El caudal o escurrimiento es la salida, concentrado en el espacio de salida de la cuenca, que puede ser el curso de agua o río. La evaporación y la transpiración también pueden considerarse como salidas. La estructura del sistema es el conjunto de caminos de flujo sobre el suelo o a través de él e incluye sistemas tributarios que eventualmente convergen para convertirse en caudal a la salida de la cuenca. Si solamente se considera la lluvia media anual (H) como entrada y el caudal medio anual (Q) como salida, el sistema podría representarse de acuerdo a la Figura 1, aunque, otras representaciones con más procesos y parámetros físicos pueden hacerse. Por ejemplo, en el gráfico 2, se ha representado la cuenca hidrográfica como un sistema integrado por algunos de sus elementos interrelacionados.

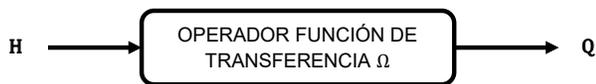


Figura 1: LA CUENCA COMO SISTEMA

Fuente: (Dooge, 1973)

Si la superficie y el suelo de la cuenca se estudian en detalle, el número de caminos posibles resulta grande. A lo largo de estos caminos, la forma, pendiente, y la rugosidad pueden cambiar continuamente. De la misma manera, la precipitación varía aleatoriamente en el tiempo y el espacio. Debido a estas complicaciones no es posible describir algunos procesos hidrológicos mediante las leyes físicas

exactas. Sin embargo, si se utiliza el concepto de sistema, el esfuerzo se dirige hacia la construcción de modelos que pueden ser conceptuales, matemáticos o de otro tipo, que relacionen entradas y salidas en lugar de representar exactamente los detalles del sistema, lo cual, de hecho, es una difícil tarea.

El objetivo del análisis de la cuenca o del ciclo hidrológico, como sistema, es estudiar la operación del mismo y predecir su salida, a partir de su entrada. Las entradas y salidas son variables hidrológicas mensurables y la estructura del sistema o modelo es una ecuación o un conjunto de ecuaciones que relacionan o conectan las entradas con las salidas. Las entradas y las salidas pueden expresarse como funciones del tiempo, por ejemplo, H(t) y Q(t) para la precipitación media anual y el caudal medio anual, respectivamente. El sistema, gracias a su propia estructura, realiza una transformación de una entrada en una salida representada por:

$$Q(t) = \Omega H(t) \quad (2)$$

La ecuación (2) se conoce como ecuación o función de transformación del sistema,  $\Omega$  se conoce como la función de transferencia entre la entrada y la salida. De acuerdo con uno de los resultados obtenidos en la presente investigación, la relación entre el caudal medio anual (salida) y la precipitación media anual, área de la cuenca, pendiente del curso principal, etc. (entradas), tiene la forma de la ecuación (1), que, si se toma en cuenta solo una entrada, por ejemplo, H, el modelo sería:

$$Q = \beta_0 H^{\beta_1} \quad (3)$$

Donde  $\beta_0$  y  $\beta_1$  son parámetros a determinarse para cada caso particular. La ecuación (3) es, evidentemente, la ecuación de transformación del sistema, a través de la cual, se transforma la entrada (H) en salida (Q). Es decir, una vez conocida la función de transferencia, es posible predecir el valor de Q para cualquier valor de la entrada H. Evidentemente, otras relaciones matemáticas más complejas se pueden plantear, como las representadas en la Figura 2.

En consecuencia, desde el punto de vista del enfoque sistémico, la ecuación de transformación o función de transformación del sistema, es la que posibilita la relación entre los componentes o procesos del ciclo hidrológico en una cuenca. Consecuentemente, el enfoque sistémico y la modelación matemática, de manera integrada, son parte de la metodología utilizada.

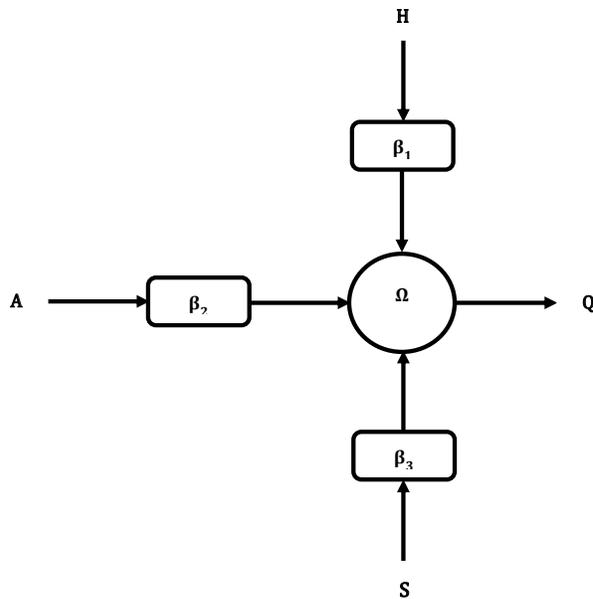


Figura 2: REPRESENTACIÓN SISTÉMICA DEL MODELO

$$Q = \beta_0 H^{\beta_1} A^{\beta_2} S^{\beta_3}$$

Fuente: (Dooge, 1973)

### 2.3. ETAPA EMPÍRICA

Las variables hidrológicas como el caudal, la precipitación y otras, son variables consideradas aleatorias y continuas, además, se miden. Esta es la etapa experimental o empírica de la investigación.

En este caso y, en general, el investigador no está a cargo de la medición de las variables hidrológicas, más bien, están bajo la responsabilidad de organismos especializados que cuentan con el instrumental y los equipos necesarios además del personal capacitado. En el caso boliviano, el Servicio Nacional de Meteorología e Hidrología, más conocido como SENAMHI, es la institución pública responsable de las citadas tareas. Este organismo brinda la información básica que hay que analizarla, contrastarla y procesarla, para luego recién hacer las estimaciones, formular modelos, etc., de acuerdo a necesidades específicas.

### 2.4. ETAPA DE ESTIMACIÓN DE LOS PROCESOS O SUBSISTEMAS

Consiste en la estimación de los valores anuales (nivel o escala de análisis del presente estudio), para cada uno de los procesos del ciclo hidrológico considerados. Para esta finalidad se siguen métodos particulares para cada proceso y que han dado resultados altamente confiables a nivel general [Mimikou, M.A.; Baltas, E.A. & Tsihrintzis, V.A., 2016; Maidment, D.,1993].

Para la estimación de la precipitación media anual ha usado el método de las curvas de igual precipitación o isoyetas, aunque otros métodos pueden usarse.

Al no disponerse de aforos durante los 365 días de cada año, una alternativa para estimar los caudales consiste en construir un modelo matemático llamada curva de caudales o curva de descarga, que consiste en determinar la relación matemática más adecuada entre los caudales aforados y sus correspondientes alturas limnimétricas (niveles de agua en los ríos). Para construir este modelo matemático se sigue el siguiente procedimiento:

- A. Selección minuciosa de los pares de valores (Q, Y), es decir, de los caudales aforados Q y sus correspondientes alturas limnimétricas Y;
  - B. Se ajustan, estos pares de valores, a un modelo matemático mediante el método de los mínimos cuadrados (regresión);
  - C. Se calculan los indicadores que definen la bondad del modelo. El indicador más usado, en este caso, es el coeficiente de correlación **R**;
  - D. Si el coeficiente de correlación es relativamente alto (próximo a la unidad), se adopta como válido el modelo para todo el periodo para el cual ha sido determinado.
- ⊕ Los caudales medios diarios son calculados, en m<sup>3</sup>/s, a partir de la altura limnimétrica media diaria Y, leída en la escala (o registrada por un limnógrafo), para el día considerado, utilizando la curva de caudales  $Q = f(Y)$  que corresponda. De ese modo, se tienen los caudales medios diarios correspondientes a los 365 días del año.

⊕ Los caudales medios mensuales se estiman considerando, para cada mes, el promedio aritmético de los caudales medios diarios. Se expresan también en m<sup>3</sup>/s. En tanto que, las aportaciones no son otra cosa que los caudales medios mensuales expresados en otras unidades, por ejemplo, hectómetros cúbicos por mes (hm<sup>3</sup>/mes).

⊕ **El caudal medio anual o módulo**, que es el indicador utilizado en el presente estudio, para un determinado año, se calcula tomado la media aritmética de los 12 caudales medios mensuales.

## 2.5. RELACIONES ENTRE LOS PROCESOS DEL CICLO HIDROLÓGICO

Una vez que se tienen estimados los valores promedios anuales de cada uno de los procesos del ciclo hidrológico considerados (precipitación pluvial y caudal), se procede a establecer las relaciones cuantitativas entre estos procesos y los parámetros físicos, bajo el concepto de que los elementos del sistema están relacionados formando la totalidad o unidad del mismo, usando el análisis multivariado y el método de los cuadrados mínimos [Maity, R. 2022; Backhaus, K., et al. 2021; Arkes, J., 2019].

### 2.5.1. RELACIONES SIMPLES

Sea Y una variable (dependiente) que corresponde a uno de los procesos del ciclo hidrológico, por ejemplo, el caudal medio anual. Del mismo modo, sea X una variable (independiente) que corresponde a otro proceso del ciclo hidrológico o una característica física de la cuenca. Si se utiliza el método de los cuadrados mínimos para la modelación, el problema puede ser tratado y resuelto mediante la siguiente estrategia metodológica [Maity, R. 2022; Backhaus, K., et al. 2021; Arkes, J., 2019; Yevjevich, 1972; Holder, 1985]:

⊕ Si se elige un modelo matemático específico, la variable de salida Y (output) es una función de la variable de entrada, X (input) y de los parámetros del modelo. En el caso de un modelo simple con dos parámetros, se puede escribir:

$$\hat{Y} = f(X, \beta_0, \beta_1) \quad (4)$$

Donde Y es la predicción de Y mediante el modelo;  $\beta_0$  y  $\beta_1$  son los parámetros del modelo, a determinar mediante una base empírica.

⊕ Calcular los parámetros  $\beta_0$  y  $\beta_1$  (problema de optimización), determinando sus valores, de manera tal que los valores predichos, Y, (estimados con el modelo), estén tan cerca como sea posible de los valores medidos Y. Un criterio para lograr esto es hacer que la suma de los cuadrados de las diferencias entre los valores predichos y los observados (medidos) de la variable, Y, sea un mínimo, es decir:

$$SSE = E(\beta_0, \beta_1) = \sum_{i=1}^n (\hat{Y}_i - Y_i)^2 = \text{mínimo} \quad (5)$$

⊕ Los valores de  $\beta_0$  y  $\beta_1$  se obtienen a partir de la solución de un sistema de ecuaciones simultáneas construidas de la siguiente manera:

$$\frac{\partial SSE}{\partial \beta_0} = 0 \quad (6)$$

$$\frac{\partial SSE}{\partial \beta_1} = 0 \quad (7)$$

Evaluar la “idoneidad” del modelo hipotético. Esto incluye calcular el coeficiente de correlación, que mide la fortaleza de la relación entre la variable dependiente y la independiente. Asimismo, se debe hacer inferencias sobre los parámetros. En el caso de un modelo de regresión simple,  $Y = \beta_0 + \beta_1 X + \epsilon$ , donde  $\epsilon$  es el componente de error aleatorio y  $E(Y) = \beta_0 + \beta_1 X$  es el componente determinista, las hipótesis o supuestos son:

- La media de la distribución de probabilidad de  $\epsilon$ , es decir, la media de los errores para una serie infinitamente larga de mediciones es cero, para cada valor de la variable independiente.
- La varianza de la distribución de probabilidad de  $\epsilon$  es constante para todos los valores de la variable independiente.

- La distribución de probabilidades de es normal.
- Los errores asociados a cualesquiera dos observaciones (mediciones) distintas, son independientes.

### 2.5.2. RELACIONES MÚLTIPLES: ANÁLISIS MULTIVARIADO

Un fenómeno natural, como el escurrimiento superficial de agua (caudal) o capital hídrico superficial, concebido como una variable dependiente, no es función de una única variable independiente, sino más bien, de varias, como la precipitación pluvial, el área de la cuenca, la pendiente del curso principal, etc. Consecuentemente, la metodología presentada anteriormente, se generaliza para modelos de regresión múltiple, con los mismos supuestos que para la regresión simple [Maity, R. 2022; Backhaus, K., et al. 2021; Arkes, J., 2019; Yevjevich, 1972; Holder, 1985].

Supóngase que, Y es una variable (dependiente) de uno de los procesos del ciclo hidrológico, por ejemplo, el caudal o escurrimiento a nivel anual. Del mismo modo,  $X_1, X_2, \dots, X_n$ , son las variables (independientes) de otros procesos del ciclo hidrológico, por ejemplo, la precipitación media anual, y de algunos parámetros físicos, por ejemplo, el área de la cuenca, la pendiente del curso principal, etc. Además, supóngase que se tienen n mediciones de cada una de las citadas variables. En consecuencia, se puede pensar en un modelo lineal general de la forma:

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \dots + \beta_p X_p + \epsilon \quad (8)$$

Donde:

$Y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \dots + \beta_p X_p$  = componente determinista;

$\epsilon$  = componente aleatorio;

$\beta_0 + \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_p$ , son los parámetros del modelo a estimar.

Si, se dispone de n mediciones u observaciones de las variables como las mencionadas en el párrafo precedente, se pueden plantear n ecuaciones, de la siguiente manera:

Si, se dispone de n mediciones u observaciones de las variables como las mencionadas en el párrafo precedente, se pueden plantear n ecuaciones, de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} Y_1 &= \beta_0 + \beta_1 X_{11} + \beta_2 X_{12} + \dots + \beta_p X_{1p} \\ Y_2 &= \beta_0 + \beta_1 X_{21} + \beta_2 X_{22} + \dots + \beta_p X_{2p} \\ &\dots \dots \dots \\ Y_n &= \beta_0 + \beta_1 X_{n1} + \beta_2 X_{n2} + \dots + \beta_p X_{np} \end{aligned}$$

Donde:

$Y_i$  = i-ésima observación de Y;

$X_{ij}$  = i-ésima observación de la j-ésima variable independiente.

Luego, las matrices de los elementos de Y, X y  $\beta$ , se pueden escribir de la siguiente manera:

$$Y = \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_n \end{bmatrix}; \quad X = \begin{bmatrix} 1 & X_{11} & X_{12} & \dots & X_{1p} \\ 1 & X_{21} & X_{22} & \dots & X_{2p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & X_{n1} & X_{n2} & \dots & X_{np} \end{bmatrix}; \quad \beta = \begin{bmatrix} \hat{\beta}_0 \\ \hat{\beta}_1 \\ \vdots \\ \hat{\beta}_p \end{bmatrix} \quad (9)$$

En notación matricial, el modelo lineal general se puede expresar como:

$$Y = X\beta + \epsilon \quad (10)$$

La solución de cuadrados mínimos de esta ecuación matricial es:

$$\hat{\beta} = (X'X)^{-1} X'Y \quad (11)$$

Ecuación que permite estimar los parámetros del modelo.

Un modelo de la siguiente forma, como el planteado en la hipótesis 2, puede, fácilmente, transformarse en lineal:

$$Y = \beta_0 X_1^{\beta_1} X_2^{\beta_2} \dots X_p^{\beta_p} \quad (12)$$

Basta aplicar logaritmos en ambos miembros de la ecuación y hacer cambios apropiados de variables para que tenga la forma matemática del modelo lineal general.

En el caso de la relación entre los procesos físicos del ciclo hidrológico y los parámetros físicos de cuencas, se puede formular:

$$Q = \beta_0 H^{\beta_1} A^{\beta_2} P^{\beta_3} S^{\beta_4} \dots \dots \quad (13)$$

Siendo:

Q = Escorrentamiento o caudal medio anual (m<sup>3</sup>/s);

H = Precipitación media anual (mm);

A = Área de la cuenca (km<sup>2</sup>);

P = Pérdidas (infiltración, evaporación, etc.), en mm;

S = Pendiente del curso principal (m/m);

son los parámetros del modelo a estimar.

$\beta_0, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \dots$ , son los parámetros del modelo a estimar.

Una vez obtenidos los parámetros del modelo para varias opciones de ecuaciones, la selección del “modelo más idóneo”, o “mejor modelo”, se realiza bajo criterios estadísticos y de predicción, cuyas expresiones matemáticas y procedimientos pueden hallarse en la literatura especializada [Maity, R. 2022; Backhaus, K., et al. 2021; Arkes, J., 2019; Yevjevich, 1972; Holder, 1985]. De todos estos criterios, se mencionan los más usados en la práctica, a saber:

- ⊕ La idoneidad o bondad global del modelo, de regresión múltiple se la determina mediante el coeficiente de correlación o determinación múltiple, R o R<sup>2</sup>, respectivamente.
- ⊕ La habilidad del modelo para predecir la variable dependiente en función de los valores de la variable independiente, es decir, la comparación de los valores medidos contra los valores estimados con los modelos. Este es considerado como un criterio práctico, de interés para fenómenos físicos y naturales.
- ⊕ Análisis de residuales.

### 3. RESULTADOS: GENERALIZACIÓN DE LAS RELACIONES O MODELOS MATEMÁTICOS

#### 3.1. SÍNTESIS DE LOS PROCESOS DEL CICLO HIDROLÓGICO

En la Cuenca Alta del río Bermejo se tienen 21 sub cuencas, en tanto que, en la Cuenca del río Pilcoma-

yo hay 16 sub cuencas, haciendo un total de 37 sub cuencas. De todas estas sub cuencas, en la parte boliviana son pocas las que disponen de información hidrométrica (producto de mediciones) que permiten estimar caudales. Concretamente, se disponen de registros en 23 estaciones hidrométricas, de las cuales, algunas son controladas por países vecinos. Consecuentemente, se han generado modelos matemáticos que permitan estimar el caudal medio anual en aquellas sub cuencas, áreas y unidades menores que no dispongan de tales mediciones, a partir de las sub cuencas que las tienen, considerando la precipitación media anual y los parámetros físicos de las sub cuencas.

Usando la metodología presentada, se han estimado los valores de los procesos del ciclo hidrológico (precipitación, H (mm) y caudal medio anual, m<sup>3</sup>/s) a nivel anual, para cada una de las cuencas y sub cuencas que pertenecen a la Cuenca del Río de La Plata en la parte boliviana, que disponen de la información pertinente. Asimismo, se han determinado el área de la cuenca (en proyección horizontal), A (km<sup>2</sup>), la pendiente del curso principal, S, y otros parámetros, para todas las sub cuencas.

Por otra parte, considerando las series históricas de los caudales medios anuales de cada una de las sub cuencas que disponen de registros hidrométricos, se han calculado los parámetros estadísticos, útiles para este caso, como son la desviación típica,  $\sigma$ , y el coeficiente de variación, determinándose, también, valores regionales de cada uno de estos parámetros, cuyos valores son, respectivamente:

- ⊕ Para los ríos del área interandina (cordillera oriental):

$$\sigma(\bar{Q}) = 3,591; \quad v(\bar{Q}) = 0,400$$

- ⊕ Para los ríos del área sub andina:

$$\sigma(\bar{Q}) = 37,283; \quad v(\bar{Q}) = 0,348$$

- ⊕ Para la totalidad del área de la cuenca del Plata (parte boliviana):

$$\sigma(\bar{Q}) = 24,325; \quad v(\bar{Q}) = 0,368$$

### 3.2. LOS MEJORES MODELOS

Una vez estimados los valores del caudal medio anual (en las sub cuencas que disponen de mediciones), la precipitación media anual y sus correspondientes parámetros físicos, usando la metodología ya descrita, se han desarrollado los modelos matemáticos correspondientes. En el cuadro 1, a modo de ejemplo, se presentan los resultados estadísticos de la modelación (regresión múltiple), para el caso de los ríos del área interandina de la Cuenca del Plata (parte boliviana). De este cuadro, se puede establecer lo siguiente:

- ⊕ Considerando el coeficiente de correlación, como un indicador inicial de la idoneidad del modelo, el que mayor valor ofrece, es el modelo no lineal que define como función de H, A y S.
- ⊕ Los errores estándar de estimación  $\sigma(\beta_1)$ ,  $\sigma(\beta_2)$  y  $\sigma(\beta_3)$  son menores que sus correspondientes valores de  $\beta_1$ ,  $\beta_2$  y  $\beta_3$ .

CUADRO 1: RESULTADOS DE LA MODELACIÓN NO LINEAL – ÁREA INTERANDINA

VI	$\beta_1$	$\sigma(\beta_1)$	$\beta_2$	$\sigma(\beta_2)$	$\beta_3$	$\sigma(\beta_3)$	R <sup>2</sup>	R
H,A,S	2,989	0,273	0,939	0,071	-0.405	0,170	0,971	0,985
H,A	2,666	0,274	1,052	0,061	-	-	0,958	0,979
H,S	2,443	0,984	-	-	-1,905	0,461	0,581	0,762
A,S	-	-	0,820	0,217	0,522	0,455	0,701	0,837
H	-0,874	0,819	-	-	-	-	0,070	0,265
A	-	-	0,604	0,108	-	-	0,673	0,820
S	-	-	-	-	-0,971	0,309	0,396	0,629

(VI = Variable Independiente)

⊕ En los otros casos (dos y una variable independiente), los coeficientes de correlación son más bajos. Consecuentemente, tomando en cuenta los criterios mencionados, se presentan a continuación, los mejores modelos o modelos más idóneos, para la estimación de los caudales medios anuales en función de las variables independientes (H, A, S):

○ Área interandina (Cordillera Oriental):

$$\bar{Q} = 4,376E(-11) \frac{H^{2,989} A^{0,939}}{S^{0,405}} \tag{14}$$

$$R = 0,985$$

Pertencen al área interandina las sub cuencas de la parte alta de la Cuenca del Pilcomayo y las sub cuencas del Valle Central de Tarija, que forman parte de la Cuenca Alta del Bermejo.

$$\bar{Q} = 9,985E(-7)H^{1,393} A^{0,951} \tag{15}$$

$$R = 0,999$$

○ Área sub andina:

Las sub cuencas del área sub andina son, por una parte, las perteneciente al río Pilcomayo en parte de la llanura chaqueña y, por otra, las cuencas de afluentes del río Grande de Tarija, que bajan de la provincia O’connor, además de las estaciones de aforo San Telmo y Astilleros (Río Grande de Tarija), Balapuca y Aguas Blancas (Río Bermejo).

$$\bar{Q} = 1,091E(-8) H^{2,046} A^{0,959} \quad (16)$$

$$R = 0,962$$

○ Totalidad del área:

En estos modelos matemáticos:

Q = caudal medio anual (m³/s);

H = precipitación media anual (mm);

A = área de la cuenca en proyección horizontal (km²);

S = pendiente media del curso (río) principal (%).

Para estos tres modelos, que, con los criterios mencionados anteriormente, son los “más idóneos”, se han realizado otras pruebas de interés desde el punto de vista práctico. En este orden de cosas, un modelo matemático, que represente un fenómeno, expresado mediante una variable (caudal medio anual), será idóneo cuando el valor estimado con el modelo sea muy próximo al valor medido (in situ), asumiendo que las pequeñas diferencias obedecen, desde el punto de vista estadístico, a errores de muestreo. Esta prueba equivale a que, al representar gráficamente los pares de puntos (valores observados o medidos contra los valores estimados con el modelo matemático), éstos se sitúen a lo largo de una recta de 45° (pendiente aproximadamente igual a la unidad) y que pase por el origen de coordenadas (ordenada al origen próxima a cero).

En el caso del modelo de la región sub andina, esta prueba arroja la siguiente ecuación, al comparar los valores observados (OBS), contra los valores estimados con el modelo (EST):

$$OBS = 0,273 + 0,998 (EST) \quad (17)$$

$$R = 0,999$$

Como puede apreciarse, la pendiente de la recta es prácticamente igual a la unidad (0,998), la ordenada al origen se aproxima a cero (0,273) y el coeficiente de correlación es muy alto, lo que significa que la prueba es satisfactoria y el modelo es idóneo.

Similar resultado se ha obtenido al hacer la misma prueba para las sub cuencas del área interandina, lo cual no ha ocurrido cuando se consideran, en un mismo modelo, representado por la ecuación (16), todas las sub cuencas, es decir, las de la Alta Cuenca del Bermejo y del Pilcomayo, lo cual era previsible, tomando en cuenta las regiones geográficas a las que pertenecen.

En suma, los modelos más idóneos, que permiten estimar el capital hídrico superficial, expresado en términos de caudal medio anual, para aquellas sub cuencas que no disponen de mediciones hidrométricas, son los representados por las ecuaciones (14) y (15) para las áreas interandina y sub andina, respectivamente, de los ríos pertenecientes a la Cuenca del Plata (parte boliviana).

### 3.3. APLICACIÓN DE LOS MODELOS EN TÉRMINOS DE PROBABILIDAD

Considerando la aleatoriedad de las variables hidrométricas, como el caudal, es habitual aplicar modelos de distribución de probabilidades al cálculo de esta variable para diferentes probabilidades de ocurrencia o periodos de retorno. Sin entrar en consideraciones teóricas al respecto, se ha demostrado que el caudal medio anual para diferentes periodos de retorno,  $Q_T$ , está dado por la expresión [Maidment, 1993]:

$$Q_T = \bar{Q} + \sigma(\bar{Q})K_T \quad (18)$$

En la que,  $K_T$  se denomina factor de frecuencia, cuyos valores dependen del modelo de distribución de probabilidades adoptado y del periodo de retorno.

Si se divide esta ecuación entre  $\bar{Q}$ , se obtiene la siguiente ecuación:

$$\frac{Q_T}{\bar{Q}} = 1 + v(\bar{Q})K_T \quad (19)$$

Al haberse calculado los valores regionales de  $\bar{Q}$ , para cada una de las áreas o regiones de la Cuenca del Plata (área interandina y área sub andina), se tienen las siguientes ecuaciones específicas, para cada una de éstas, respectivamente:

$$\bar{Q}_T = \bar{Q}(1 + 0,40K_T) \quad (20)$$

$$\bar{Q}_T = \bar{Q}(1 + 0,348K_T) \quad (21)$$

La utilidad práctica de estas ecuaciones es evidente. Supóngase que se desea estimar el caudal en un río de una sub cuenca, perteneciente al área sub andina de la Cuenca del Plata (parte boliviana), para la cual se conocen el área de la cuenca,  $A$ , y la precipitación media anual,  $H$ . El procedimiento es muy simple, a saber:

- ⊕ Se sustituyen los valores de  $H$  y  $A$  en la ecuación (15) para obtener el caudal medio anual;
- ⊕ Se define un modelo de distribución de probabilidades. En el caso de caudales medios anuales, se demuestra que los modelos normal y log-normal son apropiados;
- ⊕ Dependiendo del modelo de distribución de probabilidades adoptado, se obtienen los valores del factor de frecuencia,  $K_T$  (hay tablas y ecuaciones en la literatura especializada);
- ⊕ Se sustituyen los valores de  $\bar{Q}$  y  $K_T$  en la ecuación (21) para obtener los caudales medios anuales para diferentes periodos de retorno o probabilidades de ocurrencia (excedencia) o de no ocurrencia (no excedencia), para los fines que convengan, dependiendo de los objetivos de cada estudio hidrológico en particular.

A partir de la estimación del caudal medio anual, usando uno de los modelos matemáticos propuestos, para una determinada cuenca o área específica, es fácil estimar los caudales medios mensuales, mediante coeficientes de distribución.

### 3.4. OTRAS APLICACIONES

- A. Otra aplicación de los modelos obtenidos consiste en calcular las pérdidas (déficit) como la

diferencia entre la precipitación media anual y el caudal calculado con los modelos.

- B. También, es posible analizar la sensibilidad de una variable hidrológica al variar otra. Por ejemplo, si se aceptan como válidas las relaciones obtenidas entre el caudal medio anual, la precipitación media anual y los parámetros físicos de la cuenca, se puede determinar cómo varía el caudal al hacer variar la precipitación media anual.
- C. En fin, una aplicación importante, consiste en establecer la propiedad relativa del agua que escurre. Supóngase que una cuenca pertenece a dos municipios o departamentos, cada uno de ellos aporta a la cuenca con áreas  $A_1$  y  $A_2$  y precipitaciones  $H_1$  y  $H_2$ , respectivamente. Si estos municipios pertenecen al área sub andina, se podrá estimar, usando la ecuación (15), la cuota parte del caudal de cada uno de ellos.

### 3.5. EL VALOR ECONÓMICO DEL AGUA EN TÉRMINOS PROBABILISTAS Y LOS MODELOS PLANTEADOS

El uso de los modelos propuestos y las ecuaciones (20) y (21) adaptadas a las zonas interandina y sub andina de la cuenca del Plata, respectivamente, permiten la estimación del caudal medio anual para diferentes probabilidades de ocurrencia (excedencia) o de no ocurrencia (no excedencia). Esto se hace debido a que las variables hidrológicas son consideradas aleatorias, por eso son susceptibles de aplicación de las leyes de la probabilidad.

Si el valor de una variable hidrológica está asociada a una probabilidad (de ocurrencia o no ocurrencia), es absolutamente factible asociar esa probabilidad al valor económico del agua, en términos de capital hídrico.

Por ejemplo, si se establece que se necesita un caudal  $Q_D$  para satisfacer cierta demanda y, si se estima, usando los modelos planteados, que la probabilidad de que el caudal (anual o mensual) sea mayor que  $Q_D$ , es 0,90; el nivel de garantía, para satisfacer esa demanda, es muy alto, consecuentemente, el valor

económico del agua debe ser mucho mayor que si se tiene una probabilidad muy baja, por ejemplo 0,40.

En suma, lo que se está planteando, es una pauta o criterio que permite establecer el valor económico del agua (capital hídrico) en términos de probabilidades.

## 4. CONCLUSIONES

- ⊕ Al haber formulado modelos matemáticos, mediante un enfoque sistémico y análisis multivariado, que integran los principales componentes del ciclo hidrológico con las propiedades físicas de las cuencas y que permiten estimar el capital hídrico superficial, expresado en términos de caudal medio anual en cursos de agua para los cuales no se disponen de registros hidrométricos, se ha contribuido al conocimiento hidrológico nacional y se ha provisto de un instrumento útil a los planificadores hidrológicos. Consecuentemente, se han alcanzado los objetivos formulados.
- ⊕ La construcción de los modelos mencionados y su ratificación mediante las pruebas estadísticas y prácticas pertinentes, han conducido a la comprobación de las hipótesis formuladas.
- ⊕ Se ha comprobado que el caudal medio anual de las corrientes del área estudiada, depende de variables como la precipitación media anual, el área de la cuenca y la pendiente media del curso principal.
- ⊕ Los modelos propuestos permiten la estimación de alguna de las variables del ciclo hidrológico en el sistema (cuenca), conociendo otra u otras variables. Por ejemplo, si alguna provincia, municipio o cualquier área territorial, desea saber su aporte al escurrimiento hídrico, los modelos desarrollados permiten una estimación racional de la variable.
- ⊕ Al haber integrado los procesos del ciclo hidrológico como un sistema, los modelos obtenidos permiten estudiar la sensibilidad cuantitativa del ciclo hidrológico del sistema cuando se altera, por cualquier motivo, alguno de sus componentes.
- ⊕ Los modelos son consecuentes con el enfoque sistémico que se ha dado al estudio y permiten estimar el valor económico del agua en términos de probabilidad, considerando la demanda.
- ⊕ La ausencia de una red de estaciones de aforo, pluviómetros, etc., diseñada de acuerdo a la zona y estándares internacionales, son un factor que limita la información y, por lo tanto, la investigación hidrológica de la cuenca. En consecuencia, el uso de métodos indirectos, tal como los modelos planteados, se justifica plenamente.
- ⊕ Una primera limitación que surge es la relacionada con las variables espaciales, temporales y de escala. Es decir, los modelos son válidos para el sistema cuenca del río de La Plata y para las variables estudiadas a nivel anual.
- ⊕ Si se quiere usar los modelos para otras zonas, especialmente que no tengan similitud hidrológica con el sistema estudiado, la extrapolación es arriesgada, por lo que no es recomendable su uso.
- ⊕ La extrapolación con valores más grandes que los máximos y más chicos que los mínimos utilizados en el desarrollo de los modelos, no es confiable o debe hacerse con mucha precaución.
- ⊕ El estudio ha considerado sólo los elementos fundamentales del ciclo hidrológico, es decir, el caudal y la precipitación. Sin embargo, algunos de estos elementos están muy influenciados por los parámetros propios de la cuenca, habiéndose tomando en cuenta, el área (en proyección horizontal) y la pendiente media del curso principal.

## 5. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Arkes, J. (2019). *Regression Analysis*. Routledge – Taylor & Francis. New York, USA.
- Backhaus, K., et al. (2021). *Multivariate Analysis*. Springer Gabler, Wiesbaden, Germany.
- Benítez, A. (2021). *Propiedades Mecánicas y Geotécnicas de los Suelos: Correlaciones y Modelos Matemáticos (con énfasis en los suelos bolivianos)*. Imprenta Integral, S.R.L., Tarija, Bolivia.
- Benitez, A. (2013). *Dialéctica de la Ingeniería Estructural*. Tesis Doctoral, UNSXX, Potosí, Bolivia.
- Benítez, A. (2003). *Relaciones entre los procesos del ciclo hidrológico en la Cuenca Alta del Guadalquivir*. Trabajo de investigación, Universidad de Sevilla (España).
- Benítez, A. (1996). *Criterios hidrológicos aplicados a la Ingeniería Vial*. Tesis de M.Sc., Universidad Nacional de Rosario, Argentina.
- Bunge, M. (2011). *La Investigación Científica*. Siglo Veintiuno Editores, México.
- Cabrera, E.; Roldán, J. et al. (2003). *Directrices para una política sostenible del agua*. Ingeniería del Agua, Vol. 10, No. 3, pp. 245–257, Universidad de Córdoba, España.
- Conferencia Internacional sobre el Agua y el Medio Ambiente (1992). *Declaración de Dublín e Informe de la Conferencia*. Organización Meteorológica Mundial. Ginebra, Suiza.
- Cunnane, C. (1985). *Hydrological Frequency and Time Series Analysis; Section B, Volume 3*. 1987 – 1988 International Postgraduate Course in Hydrology. University College Galway, Ireland.
- Dooge, J.C.I. & O’Kane, J.P. (2003). *Deterministic Methods in Systems Hydrology*. A.A. Balkema Publishers, The Netherlands.
- Dooge, J.C.I. (1973). *Linear theory of hydrologic systems*. Agricultural Research Service, US Department of Agriculture, Washington D.C.
- Gaceta Oficial de Bolivia, Constitución Política del Estado, febrero de 2009.
- Gaceta oficial de Bolivia, Ley No. 300 Marco de la Madre Tierra y Desarrollo Integral para Vivir Bien, diciembre de 2012.
- Garduño, H. y F. Arreguín (1994). *Efficient Water Use*. Unesco-Rostlac, Montevideo, Uruguay.
- Holder, R.L. (1985). *Multiple Regression in Hydrology*. Institute of Hydrology. Wallingford, England.
- Maidment, D. Editor in Chief (1993). *Handbook of hydrology*. McGraw Hill. USA.
- Maity, R. (2022). *Statistical methods in Hydrology and Hydroclimatology*. Springer, Singapore.
- Mimikou, M.A.; Baltas, E.A. & Tsihrintzis, V.A. (2016). *Hydrology and Water Resource Systems Analysis*. CRC Press, Florida, USA.
- Ministerio del Interior, Obras Públicas y Vivienda, Presidencia de la Nación (2017). *Red Hidrológica Nacional – Publicaciones Hidrometeorológicas*. Buenos Aires, Argentina.
- Naciones Unidas (1998). *Protocolo de Kioto*, USA.
- Mukherjee, S.P. (2020). *A guide to research methodology*. CRC Press. New York, USA.
- Organización de las Naciones Unidas (1992). *Agenda 21*, Río de Janeiro, Brasil.
- Sampieri, R.H. & Mendoza, C.P. (2018). *Metodología de la investigación: las rutas cualitativa, cuantitativa y mixta*. McGraw Hill, México.
- Sauquillo, A. (2000). *El anteproyecto del plan hidrológico nacional*. Ingeniería del Agua, Vol. 7, No.4, pp. 342–344, Universidad Politécnica de Valencia, España.
- SENAMHI (2021). *Datos Hidrológicos y Meteorológicos*. Tarija, Bolivia.
- Thomas, C.G. (2021). *Research methodology and scientific writing*. Springer, Cham, **Switzerland**.

- 🔖 Thurner, S., Hanel, R. & Klimek, P. (2018). The Theory of Complex Systems. Oxford University Press, Oxford, UK.
- 🔖 Yevjevich, V. (1972). Probability and Statistics in Hydrology. Water Resources Publications, Colorado, USA.